Prefazione

Questi appunti emergono come sintesi mirata di una lunga esperienza didattica nell'ambito dei corsi di Metodi Matematici della Fisica per la Laurea in Fisica presso l'Università degli Studi di Roma "Tor Vergata". Ho tenuto, in qualità di esercitatore, il corso di Metodi Matematici della Fisica (vecchio ordinamento) con il Prof. Giancarlo Rossi negli anni Accademici dal 2001-2002 al 2003-2004, il corso di Metodi Matematici della Fisica 1 (Laurea triennale in Fisica), sempre con il Prof. Giancarlo Rossi, negli Anni Accademici 2003-2004 e 2004-2005 e il corso di Metodi Matematici della Fisica 2 (Laurea specialistica in Fisica e Scienze dell'Universo) con il Prof. Augusto Sagnotti negli Anni Accademici 2003-2004 e 2004-2005. In qualità di docente, ho tenuto il corso di Metodi Matematici della Fisica 2 (Laurea specialistica in Fisica e Scienze dell'Universo e Laurea magistrale in Fisica) negli Anni Accademici dal 2005-2006 al 2011-2012.

Il testo affronta diversi argomenti collegati dal comun denominatore dell'Analisi Complessa, con l'idea di rendere fruibili alcune tematiche avanzate che trovano oggi vaste applicazioni nella Fisica Teorica. Naturalmente, le nozioni di Metodi Matematici che si vorrebbero "necessarie" sono numerosissime e non esauribili in un unico volume. La scelta è dunque un obbligo che, d'altra parte, rispecchia il gusto scientifico dell'autore.

Il Capitolo 1 inizia con dei richiami alle funzioni di variabile complessa per poi dirigersi verso argomenti più avanzati, quali le espansioni di Mittag-Leffler e Weierstrass, la formula di Lagrange e le somme di Gauss.

Il Capitolo 2 tratta diverse questioni relative al comportamento asintotico di rappresentazioni integrali attraverso vari metodi di punto di sella.

Il Capitolo 3 descrive alcune celebri funzioni speciali, la gamma e la beta di Eulero e la zeta di Riemann. Molte loro proprietà sono desumibili dal prolungamento analitico che ne evidenzia, ad esempio, le singolarità e gli zeri sull'intero piano di Gauss, alcuni dei quali ancora oggi non totalmente noti.

Il Capitolo 4 affronta il tema importante delle equazioni differenziali ordinarie lineari. La prima parte contiene approfondimenti sul metodo della funzione di Green, la cui utilità può difficilmente essere sopravvalutata. La seconda parte è invece dedicata al prolungamento in campo complesso, in cui di nuovo lo studio delle singolarità conduce direttamente alla classe notevole delle funzioni ipergeometriche. Tra queste, vengono trattate in dettaglio, per la loro importanza nella Fisica, le equazioni di Riemann, Legendre e Bessel.

L'affascinante tematica relativa alle funzioni ellittiche, nate storicamente dalla necessità di valutare la lunghezza dell'ellisse e associate in seguito alla classe delle funzioni doppiamente periodiche, occupa il Capitolo 5. Nello stesso capitolo trovano spazio le famose funzioni theta di Jacobi, strumenti fondamentali della moderna Teoria delle Stringhe, oltre che di numerosi ambiti della Matematica.

Il Capitolo 6 è dedicato allo studio degli operatori lineari su spazi vettoriali con un numero infinito di dimensioni. In particolare, gli spazi di Hilbert costituiscono la naturale generalizzazione degli spazi euclidei n-dimensionali, e giocano un ruolo fondamentale nella Meccanica Quantistica e nella Teoria Quantistica dei Campi. Due gli aspetti in maggiore evidenza: la dualità in relazione al formalismo di Dirac, e la teoria spettrale, necessaria per definire le osservabili fisiche, legate a opportune funzioni di operatori.

Nel Capitolo 7 vengono introdotte le trasformate integrali di Fourier e Laplace, strumenti imprescindibili del calcolo simbolico.

L'ottavo e ultimo capitolo contiene una trattazione essenziale delle equazioni differenziali a derivate parziali, rivolta principalmente alle equazioni quasi lineari del I ordine e lineari del II ordine. Di nuovo, si tratta di un argomento estremamente vasto, di cui vengono illustrate le tematiche relative alla classificazione delle equazioni e delle condizioni al contorno, nonché ai metodi più importanti di soluzione, applicati ad alcuni esempi particolarmente significativi.

A completamento del corpo principale, due appendici trattano le coordinate sferiche e la funzione delta di Dirac in n dimensioni, e una terza appendice raccoglie le formule più significative relative alle citate funzioni gamma, beta e zeta. Il testo è inoltre corredato di 24 esercizi dei quali viene fornita una soluzione dettagliata, e di 125 esercizi proposti, tratti in larga misura dai testi di esame.

Come premesso, lo sforzo espositivo è principalmente rivolto a evidenziare le connessioni fra argomenti solo in apparenza distinti, che dopo attenta analisi si rivelano spesso aspetti complementari di un medesimo problema. In questi termini, il testo si caratterizza come un tentativo di collegamento tra strumenti e metodi propri della Fisica Teorica e argomenti più squisitamente formali della Fisica Matematica.

Ringraziamenti

Vorrei anzitutto esprimere la mia profonda gratitudine al Prof. Augusto Sagnotti, mio maestro e collaboratore nella ricerca, che ha suggerito e incoraggiato la stesura di queste note. Sono anche molto grato al Prof. Mario Vietri, che ha accolto con favore la mia proposta di pubblicazione, e alla dott.ssa Luisa Ferrini per la sua cortese ed efficiente collaborazione editoriale.

Desidero inoltre ringraziare i professori Giancarlo Rossi, Giovanni Jona Lasinio e Sergio Doplicher, che insieme al Prof. Augusto Sagnotti hanno contribuito alla mia formazione scientifica per molti dei temi trattati nel testo.

Un ringraziamento assai speciale lo devo all'amico e collega Yassen S. Stanev, con il quale ho condiviso innumerevoli discussioni, spesso illuminanti, su molti argomenti di Matematica e Fisica.

Sono grato a Jose Francisco Morales, che negli ultimi anni, in qualità di esercitatore, è stato di grande supporto al corso di Metodi Matematici della Fisica e alla preparazione dei testi d'esame, e ha rappresentato un notevole stimolo ad approfondire e migliorare gli argomenti esposti.

Ringrazio anche tutti i colleghi con i quali mi hanno accomunato, in un modo o nell'altro, interessi scientifici. Tra essi, in particolare, vorrei citare Carlo Angelantonj, Massimo Bianchi, Emilian Dudas, Davide Fioravanti, Francesco Fucito, Fabio Riccioni, Maria Cristina Timirgaziu, Anastassios Vladikas, Marianna Larosa, Pascal Anastasopoulos e Andrea Lionetto.

Queste note non sarebbero mai state scritte senza l'interesse mostrato negli anni dagli studenti verso gli argomenti trattati. In particolare, devo ringraziare Donato Del Giudice, Andrea Di Gennaro, Francesca Mancini e Valerio Formato, che hanno realizzato una prima importante stesura di parte degli appunti, e infine Daniele Belardinelli che ha svolto gli esercizi dell'Appendice D e redatto le soluzioni dell'Appendice E.

Infine, sarò sempre grato a mia moglie Anna, mia madre Assunta e mio figlio Valerio: senza il loro costante incoraggiamento, la grande disponibilità e soprattutto l'enorme pazienza messe in mostra in ogni frangente, questo lavoro non avrebbe incontrato la luce.

Roma, giugno 2012

Gianfranco Pradisi