

SNS - PISA



31

Hisao Fujita Yashima Equations de Navier-Stokes stochastiques non homogènes et applications

Hisao Fujita Yashima

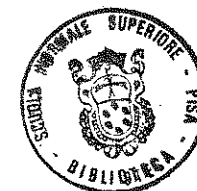
Equations de Navier-Stokes stochastiques
non homogènes et applications

TESI DI PERFEZIONAMENTO

SCUOLA NORMALE SUPERIORE

Hisao Fujita Yashima
Equations de Navier-Stokes stochastiques
non homogènes et applications

TESI DI PERFEZIONAMENTO



SCUOLA NORMALE SUPERIORE
PISA - 1992

Tesi di perfezionamento sostenuta il 28 novembre 1990

COMMISSIONE GIUDICATRICE

Luigi A. Radicati di Brozolo, Presidente
Sergio Albeverio
Giuseppe Da Prato
Sergio Spagnolo
Maurizio Pratelli
Giovanni Prodi
Pietro Tommaso Villaggio

TABLE DES MATIERES

	page
CHAPITRE 1 - Introduction	1
1. But de l'étude	1
2. Equations de Navier-Stokes et équations de Navier-Stokes non homogènes	2
3. Equations de Navier-Stokes stochastiques et équations de Navier-Stokes stochastiques non homogènes	6
4. Remarques sur les notations	12
CHAPITRE 2 - Solutions approchées	14
1. Préliminaires	14
2. Formulation des équations approchées	18
3. Equations linéaires	22
4. Estimations de la solution du problème $(L)_m$	23
5. Existence et unicité de la solution des équations approchées	31
CHAPITRE 3 - Théorème d'existence (I) - méthode semi-déterministe -	36
1. Enoncés de théorèmes	36
2. Estimations des solutions approchées	39
3. Sous-suite convergente	45
4. Passage à la limite	48
5. Démonstration des théorèmes 3.2, 3.3	51
CHAPITRE 4 - Théorème d'existence (II) - problème de martingales	59
1. Enoncés des théorèmes	59
2. Estimations des solutions approchées	69
3. Espace produit de base	85
4. Démonstration du théorème 4.1	92
5. Démonstration du théorème 4.2	109
CHAPITRE 5 - Application de la méthode développée dans le chapitre précédent aux équations stochastiques du type Navier-Stokes	124
1. Hypothèses et résultats	124
2. Solutions approchées et leurs estimations	131
3. Espace produit de base	139
4. Démonstration du théorème 5.1	144
5. Démonstration du théorème 5.2	152
6. Sur les équations de Navier-Stokes stochastiques	162
BIBLIOGRAPHIE	167

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1. - But de l'étude.

Dans cette étude, je présenterai quelques méthodes pour la résolution des équations stochastiques, en envisageant principalement les équations de Navier-Stokes stochastiques non homogènes, équations décrivant le mouvement d'un fluide visqueux incompressible non homogène soumis à une perturbation aléatoire. Cette étude nous conduira à des théorèmes d'existence pour ces dernières équations et pour les équations stochastiques du type Navier-Stokes en plusieurs formes et avec plusieurs conditions.

Pour atteindre des résultats sur l'existence de solution des équations de Navier-Stokes stochastiques non homogènes, ont été nécessaires de nouvelles techniques et même de nouvelles formulations du problème dans le cadre de la théorie des équations stochastiques. Même si ces nouveaux instruments sont développés dans la structure particulière des équations de Navier-Stokes stochastiques non homogènes, ils auront sans doute des caractères généraux pour les équations aux dérivées partielles stochastiques ou pour les équations stochastiques dans des espaces abstraits, comme on le verra dans la résolution de problèmes de martingales pour les équations stochastiques du type Navier-Stokes à valeurs

dans des espaces de Hilbert avec des conditions assez faibles.

D'autre part, des techniques développées dans la théorie des équations de Navier-Stokes et des équations de Navier-Stokes non homogènes sont constamment employées dans cette étude, ce qui constitue un lien étroit entre cette étude et la théorie mathématique bien connue de mécanique des fluides. En effet, les résultats que je montrerai seront, dans une bonne approximation, des versions stochastiques des théorèmes d'existence de Hopf [H] pour les équations de Navier-Stokes et de Kazhikhov [K], [AKM] pour les équations de Navier-Stokes non homogènes.

Je tiens à remercier tout particulièrement les professeurs Giuseppe Da Prato (Pise), Sergio Albeverio (Bochum), Maurizio Pratelli (Pise) d'avoir accepté la peine d'examiner mon travail. Je tiens à remercier également les professeurs Giovanni Prodi (Pise), Piero Villaggio (Pise), Hugo Beirão da Veiga (Pise), Ana Bela Cruzeiro (Lisbonne), Dietrich Kōlzow (Erlangen) pour les discussions utiles que j'ai eues avec eux pendant mon travail.

2. - Equations de Navier-Stokes et équations de Navier-Stokes non homogènes.

Comme on le sait bien (voir par exemple [LanLif]), le mouvement d'un fluide visqueux incompressible est régi par les équations de Navier-Stokes. Si on désigne par $u = u(t, x)$ la vitesse (au point (t, x)), par $p = p(t, x)$ la pression hydrodynamique (au point (t, x)), par $f = f(t, x)$ la force

extérieure (au point (t, x)), par ρ la densité du fluide et par ν le coefficient de viscosité, les équations de Navier-Stokes s'écrivent

$$(1.1) \quad \rho \partial_t u + \rho(u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = \rho f,$$

$$(1.2) \quad \nabla \cdot u = 0,$$

où

$$(u \cdot \nabla) = \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \nabla \cdot u = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} u_i.$$

Pendant longtemps l'objet principal des études mathématiques et physiques a été le système d'équations d'un fluide homogène, c'est-à-dire le cas où ρ et ν sont deux constantes positives (ici «homogène» signifie que toutes les parties du fluide ont les mêmes propriétés matérielles).

Or, nous nous intéressons aussi au mouvement d'un fluide visqueux incompressible non homogène. Il s'agit, par exemple, d'un mélange de deux matières fluides ou d'une solution dont la concentration varie d'une partie à l'autre de l'ensemble de la solution. Dans ce cas nous avons à considérer ρ et ν comme fonctions de t et de x , fonctions qui doivent obéir à certaines lois.

Pour un fluide visqueux incompressible non homogène, les suppositions que la viscosité $\nu = \nu(t, x)$ ait partout une même valeur et qu'il n'y ait pas de diffusion de la concentration et donc pas de diffusion de la densité, répondent à un intérêt mathématique. En effet, les hypothèses de la viscosité constante

et de l'absence de diffusion de la densité simplifient le système d'équations à étudier et en même temps conservent une bonne partie des caractères mathématiques qui différencient les équations d'un fluide non homogène des équations d'un fluide homogène. Sous ces hypothèses, ρ figurant dans (1.1) n'est plus une constante, mais une fonction de t et de x et la fonction $\rho = \rho(t, x)$ doit satisfaire aussi à

$$(1.3) \quad \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0.$$

L'équation (1.3) représente en effet la loi de conservation de la matière sous l'hypothèse de l'absence de diffusion de la densité. On appellera le système d'équations (1.1), (1.2), (1.3) les équations de Navier-Stokes non homogènes.

Depuis la moitié du XIX^e siècle, le système de Navier-Stokes (1.1)-(1.2) (avec $\rho = \text{Cte}$) a été considéré pour décrire le mouvement des fluides visqueux. Mais pour envisager le problème en termes de mathématiques d'aujourd'hui, il faudra attendre les années trente de notre siècle. En effet, au début des années trente, J. Leray a publié ses célèbres mémoires [Le1], [Le2], [Le3] sur ce sujet, qui ont été le point de départ des recherches sur les équations de Navier-Stokes dans le cadre des mathématiques actuelles. Parmi la littérature parue depuis lors sur les équations de Navier-Stokes, très vaste aujourd'hui, une place de premier ordre revient au travail de E. Hopf [H] (1951). En introduisant une classe de solutions faibles pour les équations (1.1)-(1.2), Hopf a démontré l'existence d'une solution faible des

équations (1.1)-(1.2) dans l'intervalle de temps $[0, T]$ donné avec $T > 0$ quelconque. Quant au problème d'unicité, il n'est, à notre connaissance, résolu que pour les équations de Navier-Stokes en dimension 2 (voir [LioPr]). Pour connaître les résultats essentiels sur les équations de Navier-Stokes, on peut consulter, par exemple, la monographie classique de Ladyzhenskaya [Lad] (voir aussi [T]).

Pour les équations de Navier-Stokes non homogènes (1.1), (1.2), (1.3), on doit à A. V. Kazhikhov [K] (voir aussi [AKM]) le théorème d'existence. Le problème se pose sous une forme faible en faisant usage des espaces fonctionnels V^0 , V^1 , qui seront constamment utilisés dans la suite. Soit O un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ dont la frontière ∂O est assez régulière. On pose

$$(1.4) \quad V^\infty = \{ u \in (C_0^\infty(O))^3 : \nabla \cdot u = 0 \text{ dans } O \},$$

$$(1.5) \quad V^0 = \text{adhérence de } V^\infty \text{ dans } (L^2(O))^3,$$

$$(1.6) \quad V^1 = \text{adhérence de } V^\infty \text{ dans } (H^1(O))^3.$$

On a alors le

THÉORÈME (de Kazhikhov). Si

$$f \in L^1(Q, T; L^2(O)), \quad u_0 \in V^0, \quad \rho_0 \in L^\infty(O),$$

$$0 < \text{ess inf}_{x \in O} \rho_0(x) \leq \text{ess sup}_{x \in O} \rho_0(x) < \infty,$$

alors il existe une paire de fonctions (u, ρ) telle que

$$(1.7) \quad u \in L^\infty(0, T; V^0) \cap L^2(0, T; V^1),$$

$$(1.8) \quad \rho \in L^\infty([0, T] \times O),$$

$$(1.9) \quad \int_0^T \int_O [\rho u \cdot (\partial_t \Phi + (u \cdot \nabla) \Phi) - \nu \sum_{i=1}^3 \nabla u_i \cdot \nabla \Phi_i + \rho f \cdot \Phi] dx dt =$$

$$= - \int_O \rho_0 u_0 \cdot \Phi(0, x) dx$$

pour tout $\Phi \in C^1(O, T; V^1)$ tel que $\Phi(T, \cdot) = 0$,

$$(1.10) \quad \int_0^T \int_O \rho (\partial_t \varphi + (u \cdot \nabla) \varphi) dx dt = - \int_O \rho_0 \varphi(0, x) dx$$

pour tout $\varphi \in C^1(O, T; H^1(O))$ tel que $\varphi(T, \cdot) = 0$. $\square$

Ici et dans la suite, le symbole $\cdot$ entre deux quantités vectorielles désigne le produit scalaire, c'est-à-dire, on a, pour $a, b \in \mathbb{R}^3$,

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^3 a_i b_i.$$

On trouvera la démonstration de ce théorème dans [AKM].

Les techniques avec lesquelles Kazhikhov démontre ce théorème d'existence seront utilisées très fréquemment dans cette étude souvent sans rappeler la référence. Je renvoie le lecteur à [AKM] pour les considérations détaillées sur les équations de Navier-Stokes non homogènes.

3. - Equations de Navier-Stokes stochastiques et équations de Navier-Stokes stochastiques non homogènes.

Le fluide, en tant qu'ensemble de molécules privées de lien rigide entre elles, est inévitablement assujéti à des fluctuations. Ceci pose le problème des équations du mouvement

d'un fluide qui tiennent compte de la variation due à ces fluctuations. Or, la description des fluctuations ne peut, par suite de leur nature propre, être que probabiliste. Dans les équations qu'on aura à envisager pourra donc figurer la contribution des fluctuations sous la forme d'une perturbation stochastique.

Il est vrai que la nature et la structure des fluctuations sont des problèmes à la solution desquels la physique statistique doit encore consacrer de grands efforts. Des recherches mathématiques sur les relations entre le mouvement microscopique et le mouvement macroscopique ou entre la théorie cinétique et la mécanique des milieux continus pourraient contribuer à ce but. Mais ces recherches, exigeant des méthodes assez différentes de celles employées dans la présente étude sur les équations stochastiques, ne pourront être réalisées que dans d'autres travaux.

Les fluctuations sont, par définition, petites. Lorsque le mouvement d'un fluide est stable, les petites variations restent petites. Mais, si le mouvement n'est pas stable, les petites variations peuvent provoquer de grandes variations de mouvement. Le premier exemple de l'instabilité est le cas où le nombre de Reynolds est assez grand. On observe alors en effet le phénomène de la turbulence. Le deuxième exemple est le cas d'un fluide non homogène se trouvant dans un domaine $O \subset \mathbb{R}^3$ sous le champ gravitationnel $(0, 0, -g)$ et satisfaisant à

$$u(t, x) = 0, \quad \rho(t, x) = \tilde{\rho}(x_3)$$

partout dans $\mathbb{R}_+ \times O$. Cette paire de fonctions (u, ρ) est, comme on peut le vérifier facilement, une solution permanente des équations de Navier-Stokes non homogènes, quelle que soit la fonction $\tilde{\rho}$. Mais, si la fonction $\tilde{\rho}$ n'est pas décroissante, cet état de repos n'est pas stable et une petite variation produira un mouvement dont l'allure s'écartera largement de la solution $u = 0, \rho = \tilde{\rho}$.

Nous nous intéressons alors aux équations de Navier-Stokes et aux équations de Navier-Stokes non homogènes en présence d'une perturbation stochastique. Du point de vue mathématique on désire étudier les équations avec une perturbation stochastique donnée sous une forme suffisamment générale.

Or, comme il s'agit, dans cette étude, d'un fluide incompressible, il convient de considérer le champ de vitesse u comme une fonction de t à valeurs dans l'espace V^0 et d'introduire la projection orthogonale Pr :

$$(1.11) \quad Pr = \text{projection orthogonale de } (L^2(O))^3 \text{ sur } V^0.$$

Alors, quel que soit $p \in H^1(O)$, on a

$$Pr \nabla p = 0.$$

Si on applique l'opérateur Pr à l'équation (1.1), elle se réduit à

$$Pr \partial_t u + Pr(u \cdot \nabla)u - Pr \nu \Delta u = Pr f.$$

Cette équation, jointe à la condition

$$(1.12) \quad u(t, \cdot) \in V^1,$$

peut se substituer au système d'équations (1.1), (1.2) (pour les

détails du raisonnement, voir [Lad]). Si on considère la présence d'une perturbation stochastique sous la forme d'une perturbation à la force extérieure, alors on aura à considérer l'équation stochastique

$$(1.13) \quad Pr \partial_t u + (Pr(u \cdot \nabla)u - Pr \nu \Delta u) dt = Pr p f dt + Pr p dG.$$

Dans cette étude on se limite à considérer l'équation (1.13) dans laquelle G est un processus à valeurs dans V^0 , ce qui peut être justifié si on considère la différence $G(t+\Delta t) - G(t)$ comme variation du champ de vitesse u par rapport à la solution des équations (1.1)-(1.3) pendant la période $[t, t+\Delta t]$.

S'il s'agit d'un fluide non homogène, le système d'équations est complété par

$$(1.14) \quad \partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho = 0,$$

qui n'est rien d'autre que (1.3).

On appellera le système d'équations (1.13), (1.14) avec la condition (1.12) les équations de Navier-Stokes stochastiques non homogènes. Si le fluide est homogène, on a

$$\rho = \text{Cte} > 0,$$

et donc l'équation (1.14) sera superflue. Dans ce cas, le système d'équations sera appelé les équations de Navier-Stokes stochastiques.

Pour compléter le problème, on aura besoin des conditions initiales:

$$(1.15) \quad u|_{t=0} = u_0,$$

$$(1.16) \quad \rho|_{t=0} = \rho_0.$$

La condition aux limites consistant en l'adhérence du fluide à la frontière est contenue dans (1.12). Si on veut considérer d'autres conditions aux limites, il faut modifier la condition (1.12).

Les équations de Navier-Stokes stochastiques ont été, dans la forme indiquée ci-dessus, étudiées par A. Bensoussan et R. Temam [BT], qui, considérant une classe d'équations un peu plus large dite équations stochastiques du type Navier-Stokes, ont démontré l'existence d'une solution faible. Or, dans leur travail [BT], ils ont supposé une régularité majeure (par rapport aux coordonnées spatiales) de la perturbation G , de sorte que la résolution de l'équation stochastique se réduit, pour chaque élément ω de l'espace de probabilité Ω , à celle d'une équation déterministe.

D'autre part, M. Viot [V1], [V2] a étudié le problème de martingales correspondant aux équations stochastiques du type Navier-Stokes et a démontré le théorème d'existence pour le problème. La formulation du problème de martingales lui a permis d'affaiblir la condition sur la régularité spatiale de la perturbation donnée G , mais sa méthode a été conditionnée par le fait que G est un processus de Wiener dans l'espace V^0 :

$$G = W.$$

Comme on verra dans le chapitre 5 de la présente étude, des théorèmes d'existence pour le problème de martingales correspondant aux équations stochastiques du type Navier-Stokes sont démontrés avec des conditions plus faibles que celles que

Viot [V1], [V2] a imposées.

Tandis qu'une solution des équations de Navier-Stokes stochastiques est déterminée par un processus u à valeurs dans l'espace de Hilbert V^1 , qui est un sous-espace de l'espace de Hilbert V^0 , pour déterminer une solution des équations de Navier-Stokes stochastiques non homogènes, il faut non seulement le processus u mais aussi un processus ρ à valeurs dans un espace qui n'a pas de structure d'espace de Hilbert. L'accouplement de l'équation (1.13) à l'équation (1.14) ne permet pas l'application immédiate des méthodes de [BT] et de [V1], [V2] aux équations de Navier-Stokes stochastiques non homogènes. Dans le chapitre 3 de la présente étude, on verra comment pour les équations de Navier-Stokes stochastiques non homogènes on peut obtenir un résultat analogue à celui de [BT] en utilisant des idées et des techniques de [K], [AKM] et de [BT]. Dans le chapitre 4, on envisagera le problème de martingales correspondant aux équations de Navier-Stokes stochastiques non homogènes. Pour cela, des méthodes de Viot [V2] sont utiles, mais il sera essentiel d'introduire un nouvel espace produit; toutes les informations sur une solution approchée seront traduites en une mesure de probabilité définie sur cet espace produit et on pourra chercher la convergence de solutions approchées grâce à la topologie de cet espace produit. Cette nouvelle méthode nous permettra de surmonter la difficulté causée par l'accouplement de l'équation (1.13) à l'équation (1.14).

4. - Remarques sur les notations.

i) Bien que la notation simplifiée $(\cdot, \cdot)$ pour le produit scalaire soit courante, nous désignons par

$$(\cdot | \cdot)$$

le produit scalaire dans $L^2(O)$ ou $(L^2(O))^3$, pour éviter l'équivoque entre le produit scalaire et une simple paire d'objets. Nous nous servirons aussi de la notation

$$(\nabla u | \nabla v)$$

pour désigner

$$\sum_{i,j=1}^3 (\partial_{x_i} u_j | \partial_{x_i} v_j).$$

Quand il s'agit d'une généralisation (de toute sorte) de ces produits scalaires, nous employerons la notation

$$\langle \cdot, \cdot \rangle.$$

ii) Quand le choix de l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ n'a pas d'importance particulière, on désignera alors par ω son élément générique sans mentionner explicitement l'espace Ω auquel appartient ω .

iii) Etant donné un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on écrira p.s. pour dire «presque sûrement par rapport à $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ». Mais lorsqu'on se donne plusieurs espaces de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(\Omega', \mathcal{F}', P')$, etc... dans un problème, on écrira P-p.s., P'-p.s., etc... pour préciser qu'on veut dire «presque sûrement par rapport à $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ », «presque sûrement par rapport à $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ », etc...

De manière analogue, E désignera l'espérance mathématique par rapport à $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, s'il n'y a pas de risque d'équivoque. Mais dans le cas où l'on a besoin de préciser l'espace de probabilité par rapport auquel on considère l'espérance mathématique, on emploiera les notations E_P , $E_{P'}$, etc... pour indiquer l'espérance mathématique par rapport à $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, celle par rapport à $(\Omega', \mathcal{F}', P')$, etc...

iv) Les valeurs des fonctions u , ρ , etc... dépendent naturellement de $\omega \in \Omega$ (ou $\omega' \in \Omega'$ etc...), $t \in [0, T]$, $x \in O$. Mais on écrira ces arguments seulement quand il sera utile de les indiquer explicitement. On écrira par exemple

$$u(\omega; t, x) \text{ ou } u(\omega; t) \text{ ou } u(t) \text{ ou } u(\omega) \text{ etc...}$$

selon l'utilité de l'indication explicite des arguments. On utilisera aussi des notations avec $\cdot$ à la place d'une variable, par exemple,

$$u(\omega; t, \cdot) \text{ ou } u(t, \cdot), \text{ etc...},$$

lorsqu'on veut souligner le fait qu'on considère ces fonctions comme éléments d'espaces de fonctions de la variable indiquée ici par $\cdot$. Malgré la variété des notations, on comprendra sûrement leur signification par le contexte.

CHAPITRE 2

SOLUTIONS APPROCHEES

1. - Préliminaires.

Dans ce chapitre, nous allons étudier les solutions approchées des équations de Navier-Stokes stochastiques non homogènes. Les solutions approchées vont être obtenues par la méthode de Faedo-Galerkin, en s'appuyant sur des idées illustrées dans [AKM] pour le cas déterministe. Or, nous ne citerons pas la référence toutes les fois que nous utiliserons ses idées, car il faut souvent les traduire en d'autres formes pour les adapter au cas stochastique.

Nous rappelons avant tout quelques propriétés des espaces fonctionnels dont nous nous servirons dans la suite. Ce sont soit des propriétés connues soit leurs conséquences immédiates (voir [Lad], en particulier, chap.2, §4; voir aussi [T]); leur démonstration servira à mieux rappeler les structures fondamentales de ces espaces. Nous précisons la régularité du domaine O seulement s'il y a un risque d'équivoque. Autrement nous supposons toujours que ∂O est suffisamment régulière, sans toutefois le dire expressément.

Comme on le sait bien, l'opérateur $-Pr\Delta$ est autoadjoint et défini positif, et ses vecteurs propres normalisés e_j forment une

base orthonormale de l'espace V^0 , qui est un espace de Hilbert. Ordonnons les indices j de e_j de manière que les valeurs propres λ_j correspondant à e_j vérifient la relation $\lambda_j \leq \lambda_{j+1}$. On a alors

$$(2.1) \quad \begin{cases} 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \dots, \\ \lambda_j \rightarrow \infty \text{ pour } j \rightarrow \infty. \end{cases}$$

PROPOSITION A. Si O est de classe C^r ($r \geq 2$), alors pour tout $j \in \mathbb{N}$ et pour tout $s \in \mathbb{N}$ tel que $s \leq r$, la fonction $e_j(x)$ appartient à $(H^s(O))^3$. $\square$

DÉMONSTRATION. D'après le résultat de Cattabriga [Ca], on a

$$\|u\|_{(H^s(O))^3} \leq c\|f\|_{(H^{s-2}(O))^3},$$

si u et f satisfont aux relations

$$-Pr\Delta u = f \quad (\text{dans } O),$$

$$u|_{\partial O} = 0.$$

Donc, de la relation

$$-Pr\Delta e_j = \lambda_j e_j$$

ou

$$(-Pr\Delta)^k e_j = \lambda_j^k e_j$$

on déduit que

$$e_j \in (H^s(O))^3$$

pour tout $s \in [0, 2k]$ (voir [Lad], chap.2, §4), ce qui nous conduit à la proposition. $\blacksquare$

Définissons également l'espace

$$(2.2) \quad V^2 = V^1 \cap (H^2(O))^3.$$

PROPOSITION B. Pour $s = 0, 1, 2$, on a

$$(2.3) \quad V^s = \left\{ u = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j, \quad a_j \in \mathbb{R}; \quad \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^s a_j^2 < \infty \right\}. \quad \square$$

DÉMONSTRATION. Comme $\{e_j\}$ est une base orthonormale de V^0 , il est évident que (2.3) est vraie pour $s = 0$.

Pour $s = 1$, (2.3) est la conséquence de l'équivalence entre la norme de $(H_0^1(O))^3$ et celle définie par le produit scalaire $(\nabla \cdot |\nabla \cdot)^{1/2}$ et de la relation

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j a_j^2 = (\nabla u^N | \nabla u^N) \quad (u^N = \sum_{j=1}^N a_j e_j, \quad a_j \in \mathbb{R}, \quad N \in \mathbb{N}).$$

Pour l'équivalence des normes qu'on vient de mentionner, il est essentiel que O soit borné.

Si on rappelle la définition de λ_j , la relation (2.3) pour $s = 2$ découle du résultat de Cattabriga [Ca]. Ce dernier implique en effet l'équivalence entre la norme de $(H^2(O))^3$ et $\| -\text{Pr} \Delta \cdot \|_{V^0}$ pour les éléments de V^1 . ■

En utilisant (2.3), on définit pour tout $s \in \mathbb{R}_+$ l'espace V^s :

$$V^s = \left\{ u : u = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j, \quad a_j \in \mathbb{R}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^s a_j^2 < \infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{V^s} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^s a_j^2 \right)^{1/2}.$$

PROPOSITION C. Si O est de classe C^r ($r \geq 2$), alors pour $s \in \mathbb{N}$ tel que $s \leq r$ et pour $u \in V^s$, on a

$$\|u\|_{(H^s(O))^3} \leq c(s) \|u\|_{V^s} \leq c'(s) \|u\|_{(H^s(O))^3},$$

où $c(s)$ et $c'(s)$ sont des constantes qui dépendent de s mais pas de u . □

DÉMONSTRATION. Il suffit de rappeler qu'en vertu de [Ca] on a

$$\|u\|_{(H^s(O))^3} \leq c \| -\text{Pr} \Delta u \|_{(H^{s-2}(O))^3} \quad (u \in V^1 \cap (H^s(O))^3, \quad s \geq 2)$$

et que

$$\lambda_j^m e_j = (-\text{Pr} \Delta)^m e_j \quad (m = 0, 1, \dots). \quad \blacksquare$$

Désignons par V_m le sous-espace de V^0 engendré par $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. En vertu de la construction de V_m et de la proposition C, il est évident que, si O est de classe C^r ($r \geq 2$), alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $s \in \mathbb{N}$ tel que $s \leq r$, on a

$$(2.4) \quad V_m \subset V^s \subset (H^s(O))^3.$$

On définit la projection Pr_m :

$$(2.5) \quad \text{Pr}_m = \text{projection orthogonale de } (L^2(O))^3 \text{ sur } V_m.$$

Avant de formuler le système d'équations pour l'approximation de Faedo-Galerkin, nous allons citer le résultat classique concernant l'équation (1.14).

LEMME 2.1. Si $u \in C(0, T; C^1(O) \cap V^0)$ et si $\rho_0 \in C^1(O)$, alors l'équation

$$(2.5) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho = 0 & \text{in } [0, T] \times O \\ \rho|_{t=0} = \rho_0 \end{cases}$$

admet une solution $\rho \in C^1([0, T] \times O)$ et une seule, et la dépendance de la solution $\rho \in C^1([0, T] \times O)$ des coefficients $u \in$

$C(0, T; C^1(O) \cap V^0)$ est continue. En outre, on a

$$\max_{x \in O} \rho(t, x) = \max_{x \in O} \rho_0(x), \quad \min_{x \in O} \rho(t, x) = \min_{x \in O} \rho_0(x) \quad \forall t \in [0, T]. \square$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que l'équation (2.5) est résolue par les caractéristiques. Le long de celles-ci on a le système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = (u(t, x(t)))_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$\frac{d}{dt} \rho(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = 0.$$

Le second membre $u(t, x)$ de la première équation est, par hypothèse, suffisamment régulier et on peut donc résoudre l'équation. La condition $d\rho/dt = 0$ sur les caractéristiques implique que

$$\{r \in \mathbb{R} : \exists x \in O : r = \rho(t, x)\} = \{r \in \mathbb{R} : \exists x \in O : r = \rho_0(x)\}.$$

La dépendance continue de ρ de u est évidente. ■

2. - Formulation des équations approchées.

Dans ce paragraphe, on se propose de formuler précisément les équations dont les solutions constitueront l'approximation du type Faedo-Galerkin du problème (1.12)-(1.16).

Soit $m \in \mathbb{N}$. On considère alors les équations suivantes:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} (\rho du|e_j) &= \\ &= -(\rho(u \cdot \nabla)u|e_j)dt - (\nabla u|\nabla e_j)dt + (\rho f^m|e_j)dt + (\rho dG^m|e_j) \\ &\quad j = 1, \dots, m, \quad \text{p.s.,} \end{aligned}$$

$$(2.7) \quad \partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho = 0 \quad \text{dans } [0, T] \times O \quad \text{p.s.,}$$

$$(2.8) \quad u(\omega; t) \in V_m \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{p.s.,}$$

$$(2.9) \quad u(0) = u_0^m \quad \text{p.s.,}$$

$$(2.10) \quad \rho(0) = \rho_0^m \quad \text{p.s.,}$$

où

$$u_0^m \in V_m,$$

$$\rho_0^m \in C^1(O), \quad 0 < \underline{c}_\rho \leq \rho_0^m(x) \leq \bar{c}_\rho < \infty \quad \forall x \in O,$$

$$f^m \in L^2(0, T; (L^2(O))^3)$$

et G^m est un processus stochastique continu à valeurs dans V_m , processus stochastique défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Mais, comme on le verra plus loin, la solution des équations (2.6)-(2.10) sera obtenue en résolvant les équations pour chaque $\omega \in \Omega$ fixé. Nous avons donc à considérer les équations déterministes

$$(2.6)\text{bis} \quad \begin{aligned} (\rho du|e_j) &= -(\rho(u \cdot \nabla)u|e_j)dt - (\nabla u|\nabla e_j)dt + (\rho f^m|e_j)dt \\ &\quad + (\rho dG^m|e_j) \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

$$(2.7)\text{bis} \quad \partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho = 0 \quad \text{dans } [0, T] \times O,$$

$$(2.8)\text{bis} \quad u(t) \in V_m \quad \forall t \in [0, T],$$

$$(2.9)\text{bis} \quad u(0) = u_0^m,$$

$$(2.10)\text{bis} \quad \rho(0) = \rho_0^m,$$

où u_0^m , ρ_0^m et f^m sont comme dans (2.6)-(2.10), tandis que G^m est

une fonction continue définie sur $[0, T]$ à valeurs dans V_m .

Pour étudier les équations de (2.6)bis à (2.10)bis, on pose

$$y_j(t) = (u(t)|e_j), \quad y_j^0 = (u_0^m|e_j), \quad \Gamma_j(t) = (G^m(t)|e_j),$$

et donc on a

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^m y_j(t) e_j(x), \quad u_0^m(x) = \sum_{j=1}^m y_j^0 e_j(x),$$

$$G^m(t, x) = \sum_{j=1}^m \Gamma_j(t) e_j(x).$$

On pose en outre

$$\alpha_{jk}(t) = \int_0 \rho(t, x) e_k(x) \cdot e_j(x) dx,$$

$$\tilde{\beta}_{jkl}(t) = \int_0 \rho(t, x) ((e_k(x) \cdot \nabla) e_l(x)) \cdot e_j(x) dx,$$

$$\tilde{\varphi}_j(t) = \int_0 \rho(t, x) f^m(t, x) \cdot e_j(x) dx.$$

Remarquons que, si (u, ρ) est solution du problème (2.6)bis-(2.10)bis et si u est une fonction continue à valeurs dans V^m , alors la matrice $\alpha = (\alpha_{jk}(t))$ est inversible. En effet, d'après le lemme 2.1, on a

$$0 < \underline{c}_\rho \leq \rho(t, x) \leq \bar{c}_\rho < \infty \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times 0$$

et donc, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^m \alpha_{jk}(t) \xi_j \xi_k &= \int_0 \rho(t, x) \left(\sum_{j=1}^m \xi_j e_j(x) \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^m \xi_k e_k(x) \right) dx = \\ &= \int_0 \rho(t, x) (v(x))^2 dx \geq \underline{c}_\rho \|v\|_{(L^2(0))}^2 = \underline{c}_\rho |\xi|^2 > 0, \end{aligned}$$

où $v(x) = \sum_{j=1}^m \xi_j e_j(x)$, ce qui démontre l'inversibilité de $\alpha = (\alpha_{jk})$.

En outre, il est évident que la matrice α est symétrique. Nous

posons alors

$$\begin{aligned} \beta_{jkl}(t) &= \sum_{i=1}^m (\alpha^{-1})_{ji}(t) \tilde{\beta}_{ikl}(t), \quad \gamma_{jk}(t) = (\alpha^{-1})_{jk}(t) \lambda_k, \\ \varphi_j(t) &= \sum_{k=1}^m (\alpha^{-1})_{jk}(t) \tilde{\varphi}_k(t), \end{aligned}$$

où λ_k sont les valeurs propres de $-Pr\Delta$ (voir le paragraphe 1).

Nous pouvons maintenant écrire l'équation (2.6) sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \alpha_{jk}(t) dy_k(t) &= \\ &= \left(\sum_{k,l=1}^m \tilde{\beta}_{jkl}(t) y_k(t) y_l(t) \right) dt - \lambda_j y_j(t) dt + \tilde{\varphi}_j(t) dt \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \alpha_{jk}(t) d\Gamma_k(t) \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

ou, en la multipliant par $(\alpha^{-1})(t)$,

$$\begin{aligned} (2.11) \quad dy_j(t) &= - \left(\sum_{k,l=1}^m \beta_{jkl}(t) y_k(t) y_l(t) \right) dt - \left(\sum_{k=1}^m \gamma_{jk}(t) y_k(t) \right) dt \\ &\quad + \varphi_j(t) dt + d\Gamma_j(t) \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

La condition (2.9) se transforme en

$$(2.12) \quad y_j(0) = y_j^0.$$

Le problème (2.6)-(2.10) sera donc résolu quand le problème suivant le sera.

PROBLÈME (N)_m. Trouver un processus stochastique y à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ tel que y satisfasse aux équations (2.11), (2.12), si on pose

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^m y_j(t) e_j(x),$$

et si on définit $\rho(t, x)$ par l'équation (2.7) avec la condition

initiale (2.10) et $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$ de la manière indiquée ci-dessus.

3. - Equations linéarisées.

Formulons le problème linéarisé de la manière suivante.

Supposons que $\bar{y}_j$ ($j = 1, \dots, m$) sont des fonctions réelles continues définies sur $[0, T]$. Alors, en définissant

$$(2.13) \quad \bar{u}(t, x) = \sum_{j=1}^m \bar{y}_j(t) e_j(x),$$

on résout l'équation en $\bar{\rho}$

$$(2.14) \quad \begin{cases} \partial_t \bar{\rho}(t, x) + \bar{u}(t, x) \cdot \nabla \bar{\rho}(t, x) = 0 & \text{dans } [0, T] \times \mathcal{O}, \\ \bar{\rho}(0, \cdot) = \rho_0^m \end{cases}$$

(voir le lemme 2.1). Définissons maintenant $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\varphi}$ de la même manière que nous avons défini $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$ dans le paragraphe 2 (naturellement dans la définition de $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\varphi}$, on remplace la fonction $\rho(t, x)$ par la fonction $\bar{\rho}(t, x)$ donnée par (2.14)).

A l'aide de ces définitions on pose le problème linéarisé:

PROBLÈME $(L)_m$. Etant donnée une fonction continue $\bar{y}$ (définie sur $[0, T]$) à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, et étant définis $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\varphi}$ de la manière indiquée ci-dessus, trouver une fonction y à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ qui satisfait aux équations suivantes:

$$(2.15) \quad \begin{aligned} dy_j(t) = & - \left(\sum_{k=1}^m \bar{\beta}_{jkl}(t) \bar{y}_k(t) y_l(t) \right) dt \\ & - \left(\sum_{k=1}^m \bar{\gamma}_{jk}(t) y_k(t) \right) dt + \bar{\varphi}_j(t) dt + d\Gamma_j(t) \\ & j = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

$$(2.16) \quad y_j(0) = y_j^0.$$

On a alors le

LEMME 2.2. Le problème $(L)_m$ admet une solution y et une seule. $\square$

DÉMONSTRATION. On pose

$$(2.17) \quad z_j(t) = y_j(t) - \Gamma_j(t).$$

On voit aisément que les équations (2.15)-(2.16) sont équivalentes à

$$(2.18) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} z_j(t) = \sum_{k=1}^m A_{jk}(t) z_k(t) + B_j(t) \\ z_j(0) = y_j^0 \end{cases} \quad j = 1, \dots, m,$$

où

$$\begin{aligned} A_{jk}(t) &= - \sum_{l=1}^m \bar{\beta}_{jlk}(t) \bar{y}_l(t) - \bar{\gamma}_{jk}(t), \\ B_j(t) &= - \sum_{l,k=1}^m \bar{\beta}_{jlk}(t) \bar{y}_l(t) \Gamma_k(t) - \sum_{k=1}^m \bar{\gamma}_{jk}(t) \Gamma_k(t) + \bar{\varphi}_j(t). \end{aligned}$$

Etant donnés $A_{jk}(t)$ et $B_j(t)$, on résout facilement le système d'équations différentielles ordinaires linéaires (2.18). En reconstruisant y par la relation (2.17), on voit immédiatement que $y = (y_j)$ satisfait à (2.15)-(2.16). L'unicité de la solution y est évidente. Le lemme est démontré. $\blacksquare$

4. - Estimations de la solution du problème $(L)_m$.

Pour résoudre le problème $(N)_m$, on aura besoin d'estimations de la fonction $z(t) = y(t) - \Gamma(t)$ obtenue par la résolution de

(2.18). On a le

LEMME 2.3. Il existe une fonction continue croissante bornée $\varphi: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que, si $y(t) = (y_j(t)) = (z_j(t) + \Gamma_j(t))$ est la solution du problème $(L)_m$ et si les fonctions continues $\bar{y}(t)$ qui figurent dans le problème $(L)_m$ vérifient la condition

$$(2.19) \quad \sum_{j=1}^m \bar{z}_j(t)^2 \leq \varphi(t) \quad \forall t \in [0, T] \quad (\bar{z}_j(t) = \bar{y}_j(t) - \Gamma_j(t)),$$

alors on a

$$(2.20) \quad \sum_{j=1}^m z_j(t)^2 \leq \varphi(t) \quad \forall t \in [0, T]. \square$$

DÉMONSTRATION. On pose

$$(2.21) \quad \varphi(t) = \frac{1}{\bar{c}_\rho} \psi(t),$$

où $\psi(t)$ est la solution de l'équation différentielle ordinaire linéaire

$$(2.22) \quad \begin{cases} \psi'(t) = c_1(t)\psi(t) + c_2(t), \\ \psi(0) = \bar{c}_\rho \sum_{j=1}^m (y_j^0)^2, \end{cases}$$

et $c_1(t)$ et $c_2(t)$ sont les fonctions définies par les relations

$$(2.23) \quad \begin{cases} c_1(t) = 9 \frac{\bar{c}_\rho}{\bar{c}_\rho} A(t) + (\bar{c}_\rho)^{1/2} \|f^m(t)\|_{(L^2(O))^3}, \\ c_2(t) = 3 \bar{c}_\rho A(t) \sum_{j=1}^m (\Gamma_j(t))^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \lambda_j (\Gamma_j(t))^2 \\ \quad + (\bar{c}_\rho)^{1/2} \|f^m(t)\|_{(L^2(O))^3}, \\ A(t) = \sup \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial x_p} (G^m(t, x))_q \right| : x \in O; p, q = 1, 2, 3 \right\}, \\ G^m(t, x) = \sum_{j=1}^m \Gamma_j(t) e_j(x). \end{cases}$$

Comme $\Gamma_j(t)$ est, par hypothèse, continue et que $e_j \in V_m \subset (H^3(O))^3$, la fonction $A(t)$ est bornée et continue. L'équation (2.22) est donc bien définie, de sorte que l'existence et l'unicité de la solution $\psi(t)$ sont évidentes. On remarque en outre que $\psi(t)$ est continue, non négative et bornée.

On va maintenant démontrer que, si la fonction $\bar{y}$ est donnée et satisfait à la condition (2.19) avec $\varphi(t)$ définie par (2.21)-(2.23) et si y est solution du problème $(L)_m$ avec la fonction $\bar{y}$, alors la relation (2.20) est vraie.

Comme en effet $z_j(t) = y_j(t) - \Gamma_j(t)$ ($j = 1, \dots, m$) satisfont aux équations (2.18), en multipliant les équations (2.18) par $\bar{\alpha}_{jk}(t)z_k(t)$ et en les additionnant par rapport à j et k , on obtient

$$(2.24) \quad \begin{aligned} & \sum_{j,k=1}^m \left(\frac{d}{dt} z_j(t) \right) \bar{\alpha}_{jk}(t) z_k(t) = \\ & = \sum_{j,l,k=1}^m \bar{\beta}_{jlk}(t) \bar{y}_l(t) z_k(t) z_j(t) - \sum_{j=1}^m \lambda_j z_j(t)^2 \\ & \quad - \sum_{j,l,k=1}^m \bar{\beta}_{jlk}(t) \bar{y}_l(t) \Gamma_k(t) z_j(t) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \Gamma_j(t) \\ & \quad + \sum_{j=1}^m \bar{\varphi}_j(t) z_j(t) \end{aligned}$$

où

$$\bar{\beta}_{jlk}(t) = \int_O \bar{\rho}(t, x) ((e_l(x) \cdot \nabla) e_k(x)) \cdot e_j(x) dx,$$

$$\bar{\varphi}_j(t) = \int_O \bar{\rho}(t, x) f^m(t, x) \cdot e_j(x) dx.$$

On remarque que, en posant

$$v(t, x) = \sum_{j=1}^m z_j(t) e_j(x)$$

et en tenant compte des relations (2.13)-(2.14), on a

$$\begin{aligned} & - \sum_{j, l, k=1}^m \bar{\beta}_{jlk}(t) \bar{y}_l(t) z_k(t) z_j(t) = \\ & = - \int_0 \bar{\rho}(t, x) ((\bar{u}(t, x) \cdot \nabla) v(t, x)) \cdot v(t, x) dx = \\ & = \frac{1}{2} \int_0 (\bar{u}(t, x) \cdot \nabla \bar{\rho}(t, x)) (v(t, x))^2 dx = \\ & = - \frac{1}{2} \int_0 (\partial_t \bar{\rho}(t, x)) (v(t, x))^2 dx = \\ & = - \frac{1}{2} \sum_{j, k=1}^m \left(\frac{d}{dt} \bar{\alpha}_{jk}(t) \right) z_j(t) z_k(t), \end{aligned}$$

et donc l'équation (2.24) se réduit à

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{j, k=1}^m \bar{\alpha}_{jk}(t) z_j(t) z_k(t) = \\ (2.25) \quad & = - \sum_{j=1}^m \lambda_j z_j(t)^2 - \sum_{j, l, k=1}^m \bar{\beta}_{jlk}(t) \bar{z}_l(t) \Gamma_k(t) z_j(t) \\ & - \sum_{j, l, k=1}^m \bar{\beta}_{jlk}(t) \Gamma_l(t) \Gamma_k(t) z_j(t) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \Gamma_j(t) z_j(t) \\ & + \sum_{j=1}^m \bar{\varphi}_j(t) z_j(t). \end{aligned}$$

Mais, en posant $\bar{v}(t, x) = \sum_{j=1}^m \bar{z}_j(t) e_j(x)$, on a

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j, l, k=1}^m \bar{\beta}_{jlk}(t) \bar{z}_l(t) \Gamma_k(t) z_j(t) \right| = \\ & = \left| \int_0 \bar{\rho}(t, x) (\bar{v}(t, x) \cdot \nabla) G^m(t, x) \cdot v(t, x) dx \right| \leq \\ (2.26) \quad & \leq 3 \bar{c}_\rho A(t) \left(\frac{1}{2} \int_0 |v(t, x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0 |\bar{v}(t, x)|^2 dx \right) \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{3}{2} \bar{c}_\rho A(t) \left(\frac{1}{\bar{c}_\rho} \sum_{j, k=1}^m \bar{\alpha}_{jk}(t) z_j(t) z_k(t) + \sum_{j=1}^m \bar{z}_j(t)^2 \right)$$

et

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j, l, k=1}^m \bar{\beta}_{jlk}(t) \Gamma_l(t) \Gamma_k(t) z_j(t) \right| = \\ & = \left| \int_0 \bar{\rho}(t, x) (G^m(t, x) \cdot \nabla) G^m(t, x) \cdot v(t, x) dx \right| \leq \\ (2.27) \quad & \leq 3 \bar{c}_\rho A(t) \left(\frac{1}{2} \int_0 |v(t, x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0 |G^m(t, x)|^2 dx \right) \leq \\ & \leq \frac{3}{2} \bar{c}_\rho A(t) \left(\frac{1}{\bar{c}_\rho} \sum_{j, k=1}^m \bar{\alpha}_{jk}(t) z_j(t) z_k(t) + \sum_{j=1}^m \Gamma_j(t)^2 \right) \end{aligned}$$

(pour la définition de $G^m(t, x)$ et de $A(t)$, voir (2.23)).

D'autre part, comme on a

$$\left| \sum_{j=1}^m \lambda_j \Gamma_j(t) z_j(t) \right| \leq \sum_{j=1}^m \lambda_j z_j(t)^2 + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^m \lambda_j \Gamma_j(t)^2,$$

il vient

$$(2.28) \quad - \sum_{j=1}^m \lambda_j z_j(t)^2 - \sum_{j=1}^m \lambda_j \Gamma_j(t) z_j(t) \leq \frac{1}{4} \sum_{j=1}^m \lambda_j \Gamma_j(t)^2.$$

A la fin, on voit facilement que

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^m \bar{\varphi}_j(t) z_j(t) \right| = \left| \int_0 \bar{\rho}(t, x) f^m(t, x) \cdot v(t, x) dx \right| \leq \\ (2.29) \quad & \leq \frac{1}{2} (\bar{c}_\rho)^{1/2} \|f^m(t, \cdot)\|_{(L^2(\mathcal{O}))^3} (1 + \sum_{j, k=1}^m \bar{\alpha}_{jk}(t) z_j(t) z_k(t)). \end{aligned}$$

Il résulte des relations (2.25)-(2.29) que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \sum_{j, k=1}^m \bar{\alpha}_{jk}(t) z_j(t) z_k(t) \leq \\ & \leq (6 \frac{\bar{c}_\rho}{\bar{c}_\rho} A(t) + (\bar{c}_\rho)^{1/2} \|f^m(t, \cdot)\|_{(L^2(\mathcal{O}))^3}) \sum_{j, k=1}^m \bar{\alpha}_{jk}(t) z_j(t) z_k(t) \end{aligned}$$

$$+ 3 \bar{c}_\rho A(t) \sum_{j=1}^m (\bar{z}_j(t)^2 + \Gamma_j(t)^2) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \lambda_j \Gamma_j(t)^2 \\ + (\bar{c}_\rho)^{1/2} \|f^m(t, \cdot)\|_{(L^2(O))^3},$$

ou, compte tenu de l'hypothèse (2.19) et de la définition (2.21),

$$(2.30) \quad \frac{d}{dt} \sum_{j,k=1}^m \bar{\alpha}_{jk}(t) z_j(t) z_k(t) \leq \\ \leq (6 \frac{\bar{c}_\rho}{-\rho} A(t) + (\bar{c}_\rho)^{1/2} \|f^m(t)\|_{(L^2(O))^3}) \times \\ \times \sum_{j,k=1}^m \bar{\alpha}_{jk}(t) z_j(t) z_k(t) \\ + 3 \bar{c}_\rho (\bar{c}_\rho)^{-1} A(t) \psi(t) + c_2(t)$$

(pour la définition de $c_2(t)$, voir (2.23)).

En rappelant que pour $t = 0$ on a

$$\sum_{j,k=1}^m \bar{\alpha}_{jk}(0) z_j(0) z_k(0) = \sum_{j,k=1}^m \bar{\alpha}_{jk}(0) y_j^0 y_k^0 \leq \bar{c}_\rho \sum_{j=1}^m (y_j^0)^2 = \psi(0),$$

on peut maintenant appliquer le théorème de la comparaison à la fonction $\psi(t)$ qui satisfait à l'équation linéaire (2.22) et à la fonction

$$t \longmapsto \sum_{j,k=1}^m \bar{\alpha}_{jk}(t) z_j(t) z_k(t),$$

qui vérifie la relation (2.30). Il s'ensuit alors que

$$\sum_{j,k=1}^m \bar{\alpha}_{jk}(t) z_j(t) z_k(t) \leq \psi(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

ou encore

$$\bar{c}_\rho \sum_{j=1}^m z_j(t)^2 \leq \psi(t) = \bar{c}_\rho \varphi(t),$$

d'où la relation (2.20). Le lemme est démontré. ■

Nous allons maintenant estimer la dérivée de la fonction

$$z(t) = y(t) - \Gamma(t).$$

LEMME 2.4. Il existe une constante C telle que, si $y(t) = (y_j(t)) = (z_j(t) + \Gamma_j(t))$ est solution du problème $(L)_m$ et si la fonction continue $\bar{y}(t)$ figurant dans le problème $(L)_m$ vérifie la condition (2.19), alors on a

$$(2.31) \quad \int_0^T \sum_{j=1}^m \left(\frac{d}{dt} z_j(t) \right)^2 dt \leq C.$$

La constante C ne dépend pas de $\bar{y}(\cdot)$ pourvu que $\bar{y}(\cdot)$ vérifie la condition (2.19). □

DÉMONSTRATION. Comme les fonctions $z_j(t)$ satisfont à (2.18), en multipliant les équations par

$$\bar{\alpha}_{jk}(t) \frac{d}{dt} z_j(t) = \bar{\alpha}_{jk} z'_j(t)$$

et en les additionnant par rapport à j et k , on obtient

$$(2.32) \quad \sum_{j,k=1}^m \bar{\alpha}_{jk}(t) z'_j(t) z'_k(t) = \\ = - \sum_{j,l,k=1}^m \bar{\beta}_{jlk}(t) \bar{z}_l(t) z_k(t) z'_j(t) - \sum_{j,l,k=1}^m \bar{\beta}_{jlk}(t) \Gamma_l(t) z_k(t) z'_j(t) \\ - \sum_{j,l,k=1}^m \bar{\beta}_{jlk}(t) \bar{z}_l(t) \Gamma_k(t) z'_j(t) - \sum_{j,l,k=1}^m \bar{\beta}_{jlk}(t) \Gamma_l(t) \Gamma_k(t) z'_j(t) \\ - \sum_{j=1}^m \lambda_j z_j(t) z'_j(t) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \Gamma_j(t) z'_j(t) + \sum_{j=1}^m \bar{\varphi}_j(t) z'_j(t)$$

(les notations sont les mêmes que celles de la démonstration du lemme 2.3). On peut en outre vérifier facilement

$$\left| \sum_{j,l,k=1}^m \bar{\beta}_{jlk}(t) \bar{z}_l(t) z_k(t) z'_j(t) \right| = \\ = \left| \int \bar{\rho}(t, x) (\bar{v}(t, x) \cdot \nabla) v(t, x) \cdot \frac{d}{dt} v(t, x) dx \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
& \leq \bar{c}_\rho A_1(t) \sum_{p,q=1}^3 \int_0^1 |(\bar{v}(t,x))_p| \left| \frac{d}{dt} (v(t,x))_q \right| dx \leq \\
& \leq \bar{c}_\rho A_1(t) \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 |\bar{v}(t,x)|^2 dx + \varepsilon \int_0^1 \left| \frac{d}{dt} v(t,x) \right|^2 dx \right) \leq \\
& \leq \frac{3}{2} \bar{c}_\rho A_1(t) \left(\frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^m \bar{z}_j(t)^2 + \frac{\varepsilon}{\bar{c}_\rho} \sum_{j,k=1}^m \bar{\alpha}_{jk}(t) z'_j(t) z'_k(t) \right),
\end{aligned}$$

où

$$A_1(t) = \sup \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial x_p} (v(t,x))_q \right| : x \in O; p, q = 1, 2, 3 \right\}.$$

Or, en vertu du lemme 2.3, on a

$$A_1(t) \leq m^{1/2} (\varphi(t))^{1/2} S_1 \leq c_1 \quad \forall t \in [0, T],$$

où

$$S_1 = \sup \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial x_p} (v(t,x))_q \right| : x \in O; p, q = 1, 2, 3; j = 1, \dots, m \right\}.$$

Donc, compte tenu aussi de l'hypothèse (2.19), on obtient

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{j,k=1}^m \bar{\beta}_{jik}(t) \bar{z}_i(t) z'_k(t) z'_j(t) \right| \leq \\
& \leq c(\varepsilon') \varphi(t) + \varepsilon' \sum_{j,k=1}^m \bar{\alpha}_{jk}(t) z'_j(t) z'_k(t).
\end{aligned}$$

Si on effectue également des calculs analogues pour les autres termes du second membre de (2.32) et si on rappelle que la fonction $A(t)$ définie dans (2.23) est bornée, alors on obtient

$$\begin{aligned}
& \sum_{j,k=1}^m \bar{\alpha}_{jk}(t) z'_j(t) z'_k(t) \leq \\
& \leq c(\varepsilon'') (\varphi(t) + \sum_{j=1}^m \Gamma_j(t)^2 + \|f^m(t)\|_{(L^2(O))^3}^2) \\
& + \varepsilon'' \sum_{j,k=1}^m \bar{\alpha}_{jk}(t) z'_j(t) z'_k(t).
\end{aligned}$$

En choisissant par exemple $\varepsilon'' = \frac{1}{2}$ et en intégrant cette inégalité, on obtient l'estimation (2.31). Le lemme est démontré. ■

5. - Existence et unicité de la solution des équations approchées (2.6)-(2.10).

Les lemmes 2.2, 2.3, 2.4 étant démontrés, on se propose maintenant de prouver l'existence et l'unicité de la solution des équations (2.6)-(2.10). On commence par démontrer le

THÉORÈME 2.5. *Le problème (2.6)bis-(2.10)bis admet une solution $(u, \rho) \in C(0, T; V_m) \times C^1([0, T] \times O)$ et une seule. □*

DÉMONSTRATION. L'existence et l'unicité de la solution $y(\cdot) = z(\cdot) + \Gamma(\cdot)$, démontrées dans le lemme 2.2, nous permettent de définir l'opérateur $\Lambda: C(0, T; \mathbb{R}^m) \rightarrow C(0, T; \mathbb{R}^m)$ déterminé par la relation

$$z = \Lambda \bar{z} \Leftrightarrow \begin{cases} z(\cdot) \text{ est la solution du problème (L)}_m \\ \text{avec } \bar{y}(\cdot) = \bar{z}(\cdot) + \Gamma(\cdot). \end{cases}$$

On voit aisément que l'opérateur Λ est continu (par rapport à la topologie de $C(0, T; \mathbb{R}^m)$). En effet, d'après le lemme 2.1, la solution $\bar{\rho}$ de (2.14), considérée dans la topologie de $C^1([0, T] \times O)$, dépend continûment de

$$\bar{u}(t, x) = \sum_{j=1}^m (\bar{z}_j(t) + \Gamma_j(t)) e_j(x)$$

dans la topologie $C(0, T; C^1(O) \cap V_m)$ et donc de $\bar{z}$ dans la topologie $C(0, T; \mathbb{R}^m)$. D'autre part, il est évident que la solution z du système d'équations (2.18) (qui est équivalent au système d'équations (2.15)-(2.16)) dépend continûment des coefficients de l'équation et que la dépendance de ces coefficients de $(\bar{\rho}, \bar{z}) \in$

$C^1([0,T] \times O) \times C(O,T;\mathbb{R}^m)$ est elle aussi continue, ce qui entraîne la continuité de $\Lambda: C(O,T;\mathbb{R}^m) \rightarrow C(O,T;\mathbb{R}^m)$.

Définissons maintenant l'ensemble $K \subset C(O,T;\mathbb{R}^m)$:

$$K = \{ z \in C(O,T;\mathbb{R}^m): |z(t)| \leq (\varphi(t))^{1/2} \},$$

où $\varphi(t)$ est la fonction définie par (2.21)-(2.23). Alors, d'après le lemme 2.3, on a

$$(2.33) \quad \Lambda K \subset K.$$

D'autre part, grâce au lemme 2.4, l'ensemble ΛK est borné dans la norme

$$\|\Lambda z\|_{H^1(O,T;\mathbb{R}^m)} = (\|Az\|_{L^2(O,T;\mathbb{R}^m)}^2 + \|\frac{d}{dt} \Lambda z\|_{L^2(O,T;\mathbb{R}^m)}^2)^{1/2}.$$

Comme on le sait bien, l'injection de $H^1(O,T;\mathbb{R}^m)$ dans $C(O,T;\mathbb{R}^m)$ est compacte. Donc ΛK est compact dans $C(O,T;\mathbb{R}^m)$.

Comme la continuité de Λ , la relation (2.33) et la compacité de ΛK sont vérifiées, d'après le théorème du point fixe de Schauder il existe un $z^0 \in \Lambda K \subset K \subset C(O,T;\mathbb{R}^m)$ tel que

$$z^0 = \Lambda z^0.$$

En posant donc

$$y(t) = z^0(t) + \Gamma(t),$$

$y(t)$ résout le problème $(N)_m$. Remarquons que, puisque z^0 et Γ appartiennent à $C(O,T;\mathbb{R}^m)$, on a

$$u(\cdot) = \sum_{j=1}^m y_j(\cdot) e_j \in C(O,T;V_m).$$

La fonction $\rho(t,x)$ est définie par (2.7), (2.10) et donc, en vertu du lemme 2.1, on a

$$\rho \in C^1([0,T] \times O).$$

L'unicité de la solution résulte, par un argument usuel, de l'estimation de la différence $Y(t) = y(t) - \bar{y}(t) = z(t) - \bar{z}(t)$ de deux solutions $y, \bar{y} \in C(O,T;\mathbb{R}^m)$ du problème $(N)_m$. La différence $Y(t)$ satisfait en effet à la relation

$$\begin{aligned} Y'_j(t) &= - \sum_{i,k=1}^m (\beta_{jik}(t) - \bar{\beta}_{jik}(t)) y_i(t) y_k(t) - \sum_{i,k=1}^m \bar{\beta}_{jik}(t) Y_i(t) y_k(t) \\ &\quad - \sum_{i,k=1}^m \bar{\beta}_{jik}(t) \bar{y}_i(t) Y_k(t) - \sum_{k=1}^m (\gamma_{jk}(t) - \bar{\gamma}_{jk}(t)) y_k(t) \\ &\quad - \sum_{k=1}^m \bar{\gamma}_{jk}(t) Y_k(t) + \varphi_j(t) - \bar{\varphi}_j(t), \end{aligned}$$

et donc on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |Y(t)|^2 &\leq c(|\beta(t) - \bar{\beta}(t)| + |\gamma(t) - \bar{\gamma}(t)| + |\varphi(t) - \bar{\varphi}(t)|) |Y(t)| \\ &\quad + c' |Y(t)|^2, \end{aligned}$$

où β, γ, φ (respectivement $\bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\varphi}$) sont définis comme dans le paragraphe 2 avec ρ définie par (2.7) avec $u = \sum_{j=1}^m y_j e_j$ (respectivement avec $\bar{\rho}$ définie par (2.7) avec $\bar{u} = \sum_{j=1}^m \bar{y}_j e_j$). Les différences $\beta(t) - \bar{\beta}(t), \gamma(t) - \bar{\gamma}(t), \varphi(t) - \bar{\varphi}(t)$ sont, à leur tour, estimées par $\sigma = \rho - \bar{\rho}$, de sorte qu'on a

$$|\beta(t) - \bar{\beta}(t)| + |\gamma(t) - \bar{\gamma}(t)| + |\varphi(t) - \bar{\varphi}(t)| \leq c' \|\sigma(t)\|_{L^2(O)}.$$

D'autre part, σ satisfait à la relation

$$\partial_t \sigma + u \cdot \nabla \sigma + U \cdot \nabla \bar{\rho} = 0 \quad (U = u - \bar{u}),$$

et donc on a

$$\frac{d}{dt} \|\sigma(t)\|_{L^2(O)}^2 = \int_O (U \cdot \nabla \bar{\rho}) \sigma dx \leq c |Y(t)| \|\sigma(t)\|_{L^2(O)}.$$

En appliquant le lemme de Gronwall à

$$\eta(t) = |Y(t)|^2 + \|\sigma(t)\|_{L^2(O)}^2$$

et en tenant compte que $\eta(0) = 0$, on vérifie l'unicité de la solution. ■

On est maintenant en mesure de démontrer le résultat principal de ce chapitre. On a le

THÉORÈME 2.6. *Il existe une paire de variables aléatoires (u, ρ) (par rapport au même espace de probabilité), à valeurs dans $C(0, T; V_m)$ et dans $C^1([0, T] \times O)$ respectivement, et une seule qui satisfait au système d'équations (2.6)-(2.10). □*

DÉMONSTRATION. D'après le théorème 2.5, pour presque tout ω , le problème (2.6)bis-(2.10)bis avec $G^m = G^m(\omega)$ admet une solution $(u, \rho) = (u(\omega), \rho(\omega)) \in C(0, T; V_m) \times C^1([0, T] \times O)$ et une seule. Il suffit donc de démontrer que l'application $C(0, T; V_m) \ni G^m \mapsto (u, \rho)$ définie par la solution unique obtenue dans le théorème 2.5 est mesurable.

Soient en effet G^m et $\bar{G}^m$ deux éléments de $C(0, T; V_m)$. Soient (u, ρ) , $(\bar{u}, \bar{\rho})$ les solutions des équations (2.6)bis-(2.10)bis correspondant à G^m et $\bar{G}^m$ respectivement. En utilisant des notations analogues à celles utilisées dans la démonstration de l'unicité dans le théorème 2.5, par exemple

$$y_j(t) = (u(t, \cdot) | e_j) \text{ etc...},$$

on considère la différence

$$Y(t) = y(t) - \bar{y}(t) = z(t) - \bar{z}(t) + (\Gamma(t) - \bar{\Gamma}(t))$$

des solutions y et $\bar{y}$ du problème $(N)_m$ avec $\Gamma_j(t) = (G^m(t) | e_j)$ et de celui avec $\bar{\Gamma}_j(t) = (\bar{G}^m(t) | e_j)$. On a alors, comme dans la démonstration de l'unicité dans le théorème 2.5,

$$\frac{d}{dt} |Y(t)|^2 \leq c \|\sigma(t)\|_{L^2(O)} |Y(t)| + c' |Y(t)|^2 + c'' |\Gamma(t) - \bar{\Gamma}(t)|^2,$$

$$\frac{d}{dt} \|\sigma(t)\|_{L^2(O)}^2 \leq c_1 |Y(t)| \|\sigma(t)\|_{L^2(O)}$$

où $\sigma(t) = \rho(t) - \bar{\rho}(t)$. Il s'ensuit que la convergence $\Gamma - \bar{\Gamma} \rightarrow 0$ dans $C(0, T; \mathbb{R}^m)$ implique que $Y \rightarrow 0$ dans $C(0, T; \mathbb{R}^m)$, c'est-à-dire $u - \bar{u} \rightarrow 0$ dans $C(0, T; \mathbb{R}^m)$. Cette convergence, à son tour, implique, en vertu du lemme 2.1, qu'on a $\rho - \bar{\rho} \rightarrow 0$ dans $C^1([0, T] \times O)$, ce qui prouve que l'application $G^m \mapsto (u, \rho)$ est continue et donc mesurable dans la topologie considérée. ■

CHAPITRE 3

THEOREME D'EXISTENCE (I) - METHODE SEMI-DETERMINISTE -

1. - Enoncés de théorèmes.

Dans ce chapitre, on se propose de démontrer le théorème d'existence pour les équations de Navier-Stokes stochastiques non homogènes dont le second membre est de la forme $pfdt + pdG$ avec un processus stochastique continu G à valeurs dans V^1 (théorème 3.2). Le résultat sera toutefois démontré sous une forme plus générale (théorème 3.3). La démonstration s'appuyera sur l'existence d'une solution faible des équations déterministes dont le second membre est de la forme $pfdt + pdG$ avec $G \in C(0, T; V^1)$ quelconque (théorème 3.1). Je dois cette idée à Bensoussan et Temam [BT].

Supposons que

$$(3.1) \quad f \in L^1(0, T; (L^2(O))^3),$$

$$(3.2) \quad u_0 \in V^0,$$

$$(3.3) \quad \begin{cases} \rho_0 \in L^\infty(O), \\ 0 < \underline{c}_\rho = \operatorname{ess\,inf}_{x \in O} \rho_0(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_{x \in O} \rho_0(x) = \bar{c}_\rho < \infty. \end{cases}$$

On a alors le

THEOREME 3.1. Sous les hypothèses (3.1)-(3.3), pour tout $G \in C(0, T; V^1)$ il existe $(u, \rho, \zeta) \in L^2(0, T; V^1) \times L^\infty([0, T] \times O) \times$

$\times L^\infty(0, T; V^{-1})$ tel que les relations suivantes soient vérifiées:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} & (\zeta(t)|\vartheta) - (\rho_0 u_0|\vartheta) = \\ & = \int_0^t (\rho(s)(u(s) \cdot \nabla)\vartheta|u(s))ds - \int_0^t (\nabla u(s)|\nabla\vartheta)ds \\ & + \int_0^t (\rho(s)f(s)|\vartheta)ds + (\rho(t)G(t)|\vartheta) \\ & - \int_0^t (\rho(s)(u(s) \cdot \nabla)\vartheta|G(s))ds - \int_0^t (\rho(s)(u(s) \cdot \nabla)G(s)|\vartheta)ds \end{aligned}$$

$$\forall t \in [0, T], \forall \vartheta \in V^1,$$

$$(3.5) \quad \int_0^T |(\rho(t)u(t) - \zeta(t)|\vartheta)|dt = 0 \quad \forall \vartheta \in V^1,$$

$$(3.6) \quad \begin{aligned} & \int_0^T \int_O \rho(t, x)(\partial_t \psi(t, x) + u(t, x) \cdot \nabla \psi(t, x))dxdt = \\ & = - \int_O \rho_0(x)\psi(0, x)dx \quad \forall \psi \in C^1(0, T; H^1(O)) \cap \{\psi: \psi(T, \cdot) = 0\}. \square \end{aligned}$$

Pour énoncer le résultat pour le problème stochastique, on se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On désigne par ω l'élément générique de Ω . On a alors le

THEOREME 3.2. Supposons que f, u_0, ρ_0 satisfont aux hypothèses (3.1)-(3.3) et que G soit une variable aléatoire à valeurs dans $C(0, T; V^1)$ telle que $G(0) = 0$ p.s.. Alors il existe une variable aléatoire Φ à valeurs dans

$$L^2(0, T; V^1) \times L^\infty([0, T] \times O)_{\text{faible}^*} \times L^\infty(0, T; V^{-1})_{\text{faible}^*}$$

telle que, si on pose

$$\Phi(\omega) = (u(\omega), \rho(\omega), \zeta(\omega)),$$

les relations (3.4)-(3.6) soient vérifiées presque sûrement (c'est-à-dire, les relations (3.4)-(3.6) avec $u = u(\omega), \rho = \rho(\omega),$

$\zeta = \zeta(\omega)$ soient vérifiées pour $\mathbb{P}$ -presque tout $\omega \in \Omega$). $\square$

Il nous convient toutefois de déduire le théorème 3.2 d'un théorème plus général:

THÉORÈME 3.3. Soit $\Gamma = (u_0, \rho_0, f, G)$ une variable aléatoire à valeurs dans

$$V^0 \times L^\infty(O) \text{ faible}^* \times L^1(O, T; (L^2(O))^3) \times C(O, T; V^1)$$

telle qu'il y ait deux nombres réels $\underline{c}_\rho, \bar{c}_\rho$ ($0 < \underline{c}_\rho \leq \bar{c}_\rho < \infty$) vérifiant la relation

$$(3.7) \quad \underline{c}_\rho \leq \text{ess inf}_{x \in \Omega} \rho_0(x) \leq \text{ess sup}_{x \in \Omega} \rho_0(x) \leq \bar{c}_\rho \quad \text{p.s..}$$

Alors il existe une variable aléatoire Φ à valeurs dans

$$L^2(O, T; V^1) \times L^\infty([0, T] \times O) \text{ faible}^* \times L^\infty(O, T; V^{-1}) \text{ faible}^*$$

telle que, si on pose

$$\Phi(\omega) = (u(\omega), \rho(\omega), \zeta(\omega)),$$

les relations (3.4)-(3.6) soient vérifiées presque sûrement. $\square$

Remarquons que le théorème 3.2 donne une solution faible du problème (1.12)-(1.16) avec G à valeurs dans V^1 . En effet, on voit immédiatement que l'équation (3.6) est une forme faible de l'équation (1.14) avec la condition (1.16). Pour voir que (3.4) est une formulation faible de l'équation (1.13) avec les conditions (1.12), (1.15), il suffit de poser

$$v(\omega; \cdot) = u(\omega; \cdot) - G(\omega; \cdot).$$

L'équation (1.13) sous la condition (1.12) équivaut en effet à

$$\text{Pr} \rho \partial_t v = - \text{Pr} \rho (u \cdot \nabla) u + \text{Pr} \Delta u + \text{Pr} p f,$$

et, comme on voit aisément, si u, v, ρ satisfont à cette égalité

et à (1.12), (1.14), (1.15), (1.16), et si $\rho = \rho(\omega) \in C^1(O, T; L^\infty(O))$, alors u, v, ρ, G satisfont aussi à l'équation obtenue de (3.4) par la soustraction de $(\rho(\omega; t)G(\omega; t))|_\partial$ de tous les membres de (3.4) et par la substitution

$$\rho(\omega; t)v(\omega; t) = \zeta(\omega; t) - \rho(\omega; t)G(\omega; t),$$

dans l'équation obtenue. Ceci signifie que (3.4) est une forme faible de l'équation (1.13) avec les conditions (1.12), (1.15).

2. - Estimations des solutions approchées.

Dans le chapitre précédent, nous avons obtenu les solutions approchées. Leurs estimations seront fondamentales pour la démonstration du théorème d'existence que nous allons établir dans ce chapitre. Ce paragraphe va être consacré à ces estimations.

LEMME 3.4. Soit $(u, \rho) = (u^m, \rho^m) \in C(O, T; V_m) \times C^1([0, T] \times O)$ la solution du problème (2.6)bis-(2.9)bis. Si on pose $v^m = u^m - G^m$, on a

$$(3.8) \quad \begin{aligned} & \|v^m(t)\|_{V^0}^2 + \int_0^t \|v^m(s)\|_{V^1}^2 ds \leq \\ & \leq c(\|u_0^m\|_{V^0}^2 + \int_0^t (\|f^m(s)\|_{(L^2(O))^3}^3 + \|G^m(s)\|_{V^1}^3 + \|f^m(s)\|_{V^1}^2) ds) \times \\ & \times \exp[c \int_0^t (c_1(m)(1 + c_1(m)^2) \|G^m(s)\|_{V^1} + \|f^m(s)\|_{(L^2(O))^3}^3) ds], \end{aligned}$$

où c est une constante indépendante de m , et $c_1(m)$ est donné par

$$c_1(m) = \sup_{0 \leq s \leq 1} \|G^m(s)\|_{V^1}. \quad \square$$

DÉMONSTRATION. Puisque v^m satisfait à l'équation

$$(\rho^m \partial_t v^m | e_j) = (-\rho(u^m \cdot \nabla) u^m + \rho f^m | e_j) - (\nabla u^m | \nabla e_j)$$

pour tout $j = 1, 2, \dots, m$, et que $v^m(t) \in V_m$, on a

$$(3.9) \quad (\rho^m \partial_t v^m | v^m) = -(\rho^m(u^m \cdot \nabla) u^m | v^m) + (\rho^m f^m | v^m) - (\nabla u^m | \nabla v^m).$$

Compte tenu de l'équation (2.7)bis, qui implique

$$-(1/2)((\partial_t \rho^m) v^m | v^m) = -(\rho^m(u^m \cdot \nabla) v^m | v^m),$$

on déduit de (3.9) que

$$(3.10) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\rho^m v^m | v^m) + (\nabla v^m | \nabla v^m) = \\ & = -(\rho^m(v^m \cdot \nabla) G^m | v^m) - (\rho^m(G^m \cdot \nabla) G^m | v^m) + (\rho^m f^m | v^m) \\ & \quad - (\nabla G^m | \nabla v^m). \end{aligned}$$

Or, comme on a

$$\begin{aligned} |(\rho^m(v^m \cdot \nabla) G^m | v^m)| & \leq c \|v^m\|_{(L^4(O))}^2 \|G^m\|_{V^1} \leq \\ & \leq c \|v^m\|_{(L^2(O))}^{1/2} \|v^m\|_{(L^6(O))}^{3/2} \|G^m\|_{V^1} \leq \\ & \leq c' |(\rho^m v^m | v^m)|^{1/4} \|v^m\|_{V^1}^{3/2} \|G^m\|_{V^1} \leq \\ & \leq \varepsilon (\sup_{0 \leq s \leq T} \|G^m(s)\|_{V^1}) \|v^m\|_{V^1}^2 + c''(\varepsilon) |(\rho^m v^m | v^m)| \|G^m\|_{V^1} \end{aligned}$$

et de manière analogue

$$\begin{aligned} |(\rho^m(G^m \cdot \nabla) G^m | v^m)| & \leq c |(\rho^m v^m | v^m)|^{1/4} \|v^m\|_{V^1}^{1/2} \|G^m\|_{V^1}^2 \leq \\ & \leq \varepsilon (\sup_{0 \leq s \leq T} \|G^m(s)\|_{V^1}) \|v^m\|_{V^1}^2 + c'(\varepsilon) |(\rho^m v^m | v^m)| \|G^m\|_{V^1} + c'' \|G^m\|_{V^1}^3 \end{aligned}$$

(voir aussi le lemme 2.1), en choisissant

$$\varepsilon = (4 \sup_{0 \leq s \leq T} \|G^m(s)\|_{V^1})^{-1} = (4c_1(m))^{-1}$$

et en estimant

$$|(\nabla G^m | \nabla v^m)| \leq \frac{1}{4} \|v^m\|_{V^1}^2 + \|G^m\|_{V^1}^2,$$

on obtient de (3.10) par un argument usuel

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\rho^m(t) v^m(t) | v^m(t)) + \|v^m(t)\|_{V^1}^2 \leq \\ & \leq c \{ (c_1(m) + c_1(m)^3) |(\rho^m(t) v^m(t) | v^m(t))| \|G^m(t)\|_{V^1} + \|G^m(t)\|_{V^1}^3 \\ & \quad + \|G^m(t)\|_{V^1}^2 + \|f^m(t)\|_{(L^2(O))}^3 (1 + (\rho^m(t) v^m(t) | v^m(t))) \}. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall à cette inégalité, on obtient

(3.8). ■

Maintenant, en se servant d'une idée illustrée dans [AKM]

(chap.3, §3), on obtient l'estimation suivante:

LEMME 3.5. Soit $(u, \rho) = (u^m, \rho^m) \in C(0, T; V_m) \times C^1([0, T] \times O)$ la solution du problème (2.6)bis-(2.10)bis. Si on pose $v^m = u^m - G^m$, on a, pour tout $\delta \in]0, T[$,

$$\begin{aligned} & \int_0^{T-\delta} \|v^m(t+\delta) - v^m(t)\|_{V^0}^2 dt \leq \\ & \leq c \delta^{1/2} \{ (\|v^m\|_{L^2(O, T; V^1)}^2 + \|G^m\|_{L^2(O, T; V^1)}^2)^{1/2} \times \\ & \quad \times (\|v^m\|_{L^2(O, T; V^1)} + \|v^m\|_{L^2(O, T; V^1)}^2) \\ & \quad + \|f^m\|_{L^1(O, T; (L^2(O))^3)} \|v^m\|_{L^2(O, T; V^0)} \}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

où la constante c ne dépend pas de m . □

DÉMONSTRATION. Soit $\delta \in]0, T[$. Fixons pour le moment un $t \in [0, T-\delta]$ et posons $V(t) = v^m(t+\delta) - v^m(t)$. Comme $V(t) \in V_m$, on a comme dans (3.10)

$$(\rho^m \partial_t v^m | V) = -(\rho^m(u^m \cdot \nabla) u^m | V) + (\rho^m f^m | V) - (\nabla u^m | \nabla V).$$

Compte tenu de la relation

$$\begin{aligned}
((\partial_t \rho^m) v^m | V) &= - ((u^m \cdot \nabla \rho^m) v^m | V) = \\
&= (\rho^m (u^m \cdot \nabla) u^m | V) - (\rho^m (u^m \cdot \nabla) G^m | V) + (\rho^m (u^m \cdot \nabla) V | v^m),
\end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned}
(3.12) \quad \frac{d}{ds} (\rho^m(s) v^m(s) | V(t)) &= \\
&= - (\rho^m (u^m \cdot \nabla) G^m | V) + (\rho^m (u^m \cdot \nabla) V | v^m) + (\rho^m f^m | V) - (\nabla u^m | \nabla V).
\end{aligned}$$

En intégrant (3.12) de t à $t+\delta$, on obtient

$$\begin{aligned}
(3.13) \quad &(\rho^m(t+\delta) V(t) | V(t)) + ((\rho^m(t+\delta) - \rho^m(t)) v^m(t) | V(t)) = \\
&= \int_t^{t+\delta} \{ (\rho^m(s) (u^m(s) \cdot \nabla) G^m(s) | V(t)) \\
&\quad + (\rho^m(s) (u^m(s) \cdot \nabla) V(t) | v^m(s)) \} ds \\
&\quad + \int_t^{t+\delta} (\rho^m(s) f^m(s) | V(t)) ds - \int_t^{t+\delta} (\nabla u^m(s) | \nabla V(t)) ds.
\end{aligned}$$

D'autre part, en vertu de (2.7)bis, on a

$$((\rho^m(t+\delta) - \rho^m(t)) v^m(t) | V(t)) = \int_t^{t+\delta} (\rho^m(s) u^m(s) | \nabla(v^m(t) \cdot V(t))) ds.$$

Compte tenu aussi du fait que

$$0 < \underline{c}_\rho \leq \rho^m(t, x) \leq \bar{c}_\rho < \infty, \quad \|\vartheta\|_{L^4(O)} \leq c \|\vartheta\|_{V^1} \text{ per } \vartheta \in V^1,$$

on déduit de (3.13) que

$$\begin{aligned}
(3.14) \quad &\frac{1}{c} \|V(t)\|_{V^0}^2 \\
&\leq \int_t^{t+\delta} \|u^m(s)\|_{V^1} ds \|v^m(t)\|_{V^1} (\|v^m(t)\|_{V^1} + \|v^m(t+\delta)\|_{V^1}) \\
&\quad + \int_t^{t+\delta} \|u^m(s)\|_{V^1} \|G^m(s)\|_{V^1} ds (\|v^m(t)\|_{V^1} + \|v^m(t+\delta)\|_{V^1}) \\
&\quad + \int_t^{t+\delta} \|u^m(s)\|_{V^1} \|v^m(s)\|_{V^1} ds (\|v^m(t)\|_{V^1} + \|v^m(t+\delta)\|_{V^1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \int_t^{t+\delta} \|f^m(s)\|_{(L^2(O))}^3 ds (\|v^m(t)\|_{V^0} + \|v^m(t+\delta)\|_{V^0}) \\
&+ \int_t^{t+\delta} \|u^m(s)\|_{V^1} ds (\|v^m(t)\|_{V^1} + \|v^m(t+\delta)\|_{V^1}).
\end{aligned}$$

Maintenant on intègre (3.14) de 0 à $T-\delta$. Pour le second

membre, on a par exemple

$$\begin{aligned}
&\int_0^{T-\delta} dt \left(\int_t^{t+\delta} \|u^m(s)\|_{V^1} ds \|v^m(t)\|_{V^1} \|v^m(t+\delta)\|_{V^1} \right) \leq \\
&\leq \delta^{1/2} \left(\int_0^T \|u^m(s)\|_{V^1}^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^{T-\delta} \|v^m(t)\|_{V^1}^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_\delta^T \|v^m(t)\|_{V^1}^2 dt \right)^{1/2} \leq \\
&\leq \delta^{1/2} (\|v^m\|_{L^2(O, T; V^1)}^2 + \|G^m\|_{L^2(O, T; V^1)}^2)^{1/2} \|v^m\|_{L^2(O, T; V^1)}^2, \\
&\int_0^{T-\delta} dt \int_t^{t+\delta} \|u^m(s)\|_{V^1} \|v^m(s)\|_{V^1} ds \|v^m(t)\|_{V^1} = \\
&= \int_0^T ds \int_{0 \vee (s-\delta)}^{s \wedge (T-\delta)} \|v^m(t)\|_{V^1} dt \|u^m(s)\|_{V^1} \|v^m(s)\|_{V^1} \leq \\
&\leq \delta^{1/2} (\|v^m\|_{L^2(O, T; V^1)}^2 + \|G^m\|_{L^2(O, T; V^1)}^2)^{1/2} \|v^m\|_{L^2(O, T; V^1)}^2, \\
&\int_0^{T-\delta} dt \int_t^{t+\delta} \|f^m(s)\|_{(L^2(O))}^3 \|v^m(t)\|_{V^0} ds = \\
&= \int_0^T ds \int_{0 \vee (s-\delta)}^{s \wedge (T-\delta)} \|v^m(t)\|_{V^0} \|f^m(s)\|_{(L^2(O))}^3 dt \leq \\
&\leq \delta^{1/2} \|v^m\|_{L^2(O, T; V^0)} \|f^m\|_{L^1(O, T; (L^2(O))^3)}.
\end{aligned}$$

En estimant de manière analogue les autres termes du second membre

de l'intégrale de (3.14) de 0 à $T-\delta$, on obtient (3.11). ■

LEMME 3.6. Soit $(u, \rho) = (u^m, \rho^m) \in C(0, T; V_m) \times C^1([0, T] \times O)$ la solution du problème (2.6)bis-(2.10)bis. Si on pose $v^m = u^m - G^m$, on a, pour tout $\vartheta \in V^1$, $\delta \in [0, T]$, $t \in [0, T-\delta]$,

$$(3.15) \quad \begin{aligned} & |(Pr_m \rho^m(t+\delta) v^m(t+\delta) | \vartheta) - (Pr_m \rho^m(t) v^m(t) | \vartheta)| \leq \\ & \leq c(\delta^{1/4} \alpha(m)^2 + \delta^{1/2} \alpha(m)) \|\vartheta\|_{V^1} + c \int_t^{t+\delta} \|f^m(s)\|_{(L^2(O))}^3 \|\vartheta\|_{V^0} ds, \end{aligned}$$

où

$$\alpha(m) = \alpha_0(m)^{1/2} + \sup_{0 \leq s \leq T} \|G^m(s)\|_{V^0} + \|G^m\|_{L^2(O,T;V^1)},$$

et $\alpha_0(m)$ est le second membre de (3.8) avec $t = T$. □

DÉMONSTRATION. Comme $\vartheta_m = Pr_m \vartheta \in V_m$, il est évident que l'on peut substituer ϑ_m à V dans (3.12). On a alors

$$(3.16) \quad \left\{ \begin{aligned} & |(\rho^m(u^m \cdot \nabla) G^m | \vartheta_m)| \leq c \|u^m\|_{(L^3(O))}^3 \|G^m\|_{V^1} \|\vartheta_m\|_{V^1} \leq \\ & \leq c(\|v^m\|_{V^0} + \|G^m\|_{V^0})^{1/2} (\|v^m\|_{V^1} + \|G^m\|_{V^1})^{1/2} \|G^m\|_{V^1} \|\vartheta_m\|_{V^1}, \\ & |(\rho^m(u^m \cdot \nabla) \vartheta_m | v^m)| \leq \\ & \leq c(\|v^m\|_{V^0} + \|G^m\|_{V^0})^{1/2} (\|v^m\|_{V^1} + \|G^m\|_{V^1})^{1/2} \|v^m\|_{V^1} \|\vartheta_m\|_{V^1}, \\ & |(\rho^m f^m | \vartheta_m)| \leq c \|f^m\|_{(L^2(O))}^3 \|\vartheta_m\|_{V^0}, \\ & |(\nabla u^m | \nabla \vartheta_m)| \leq (\|v^m\|_{V^1} + \|G^m\|_{V^1}) \|\vartheta_m\|_{V^1}. \end{aligned} \right.$$

Si on intègre de t à $t+\delta$ ($0 \leq t < t+\delta \leq T$) l'inégalité obtenue des inégalités (3.16) et de l'égalité (3.12) dans laquelle V est remplacé par ϑ_m , on obtient

$$(3.17) \quad \begin{aligned} & |(\rho^m(t+\delta) v^m(t+\delta) | \vartheta_m) - (\rho^m(t) v^m(t) | \vartheta_m)| \leq \\ & \leq c \delta^{1/4} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} (\|v^m(s)\|_{V^1} + \|G^m(s)\|_{V^1}) \right)^{1/2} \times \\ & \quad \times (\|v^m\|_{L^2(O,T;V^1)}^2 + \|G^m\|_{L^2(O,T;V^1)}^2)^{3/4} \|\vartheta_m\|_{V^1} \\ & + c \int_t^{t+\delta} \|f^m(s)\|_{(L^2(O))}^3 \|\vartheta_m\|_{V^0} ds \end{aligned}$$

$$+ c \delta^{1/2} (\|v^m\|_{L^2(O,T;V^1)} + \|G^m\|_{L^2(O,T;V^1)}) \|\vartheta_m\|_{V^1}.$$

Mais, d'après le lemme 3.4, $\sup_{0 \leq s \leq T} \|v^m(s)\|_{V^0}^2 + \|v^m\|_{L^2(O,T;V^1)}^2$ est majorée par le second membre de l'inégalité (3.8) dans laquelle $t = T$, que nous désignons par $\alpha_0(m)$. En outre, comme on le voit immédiatement, on a

$$\|\vartheta_m\|_{V^1} \leq \|\vartheta\|_{V^1}, \quad (\rho^m v^m | \vartheta_m) = (Pr_m \rho^m v^m | \vartheta).$$

Par conséquent, l'inégalité (3.15) résulte de (3.17). Le lemme est démontré. ■

3. - Sous-suite convergente.

Nous précisons maintenant les données avec lesquelles on a à résoudre les équations approchées. En effet, nous pouvons les choisir comme suit:

$$(3.18) \quad u_0^m = Pr_m u_0,$$

$$(3.19) \quad \left\{ \begin{aligned} & \rho_0^m \in C^1(O), \quad \underline{c}_\rho \leq \rho_0^m(x) \leq \bar{c}_\rho \quad \forall x \in O, \\ & \rho_0^m \rightarrow \rho_0 \quad \text{dans } L^3(O), \end{aligned} \right.$$

$$(3.20) \quad G^m = Pr_m G, \quad \text{c'est-à-dire } G^m(t, \cdot) = Pr_m G(t, \cdot) \quad \forall t \in [0, T],$$

$$(3.21) \quad \left\{ \begin{aligned} & f^m \in L^2(O, T; (L^2(O))^3), \quad f^m \rightarrow f \quad \text{dans } L^1(O, T; (L^2(O))^3), \\ & \forall [s, t] \subset [0, T] \quad \int_s^t \|f^m(r)\|_{(L^2(O))}^3 dr \leq \int_s^t \|f(r)\|_{(L^2(O))}^3 dr \end{aligned} \right.$$

(la condition (3.21) est effectivement réalisable, comme on le voit en prenant, par exemple, $f^m(t) = (1 \wedge m \|f(t)\|_{(L^2(O))}^{-1})^3 f(t)$).

Sous ces hypothèses, on a le

LEMME 3.7. Soient (u^m, ρ^m) ($m = 1, 2, \dots$) les solutions du problème (2.6)bis-(2.10)bis avec les données $u_0^m, \rho_0^m, G^m, f^m$ vérifiant les propriétés (3.18)-(3.21). Alors il existe une sous-suite $\{(u^{m'}, \rho^{m'})\}$ et trois fonctions u, ρ, ζ_1 telles que

$$(3.22) \quad u^{m'} \rightarrow u \text{ dans } L^\infty(0, T; V^0) \text{ faible}^*,$$

$$(3.23) \quad u^{m'} \rightarrow u \text{ dans } L^2(0, T; V^1) \text{ faible},$$

$$(3.24) \quad u^{m'} \rightarrow u \text{ dans } L^2(0, T; V^0) \text{ fort},$$

$$(3.25) \quad \rho^{m'} \rightarrow \rho \text{ dans } L^\infty([0, T] \times O) \text{ faible}^*,$$

$$(3.26) \quad Pr_m \rho^{m'} v^{m'} \rightarrow \zeta_1 \text{ dans } C(0, T; V^{-1}),$$

$$(3.27) \quad \int_0^T |(\rho(t)v(t)|\vartheta) - (\zeta_1(t)|\vartheta)| dt = 0 \quad \forall \vartheta \in V^1,$$

où

$$v^{m'} = u^{m'} - G^{m'}, \quad v = u - G. \quad \square$$

DÉMONSTRATION. On voit immédiatement que, en vertu des conditions (3.18), (3.20), (3.21), le second membre de (3.8) est majoré par une constante c qui ne dépend pas de m . Par conséquent, le second membre de (3.11) est lui aussi majoré par $\delta^{1/2} c'$ où c' est une constante qui ne dépend ni de m ni de δ .

D'autre part, les conditions (3.1), (3.21) impliquent qu'il existe une fonction continue $\beta_0: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\beta_0(0) = 0$ et que

$$\int_t^{t+\delta} \|f^m(s)\|_{(L^2(O))}^3 ds \leq \beta_0(\delta) \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall [t, t+\delta] \subset [0, T].$$

Donc, si on rappelle que $\alpha(m)$ est majorée par une constante

indépendante de m , on voit que le second membre de (3.15) est majoré par

$$c'' \beta(\delta) \|\vartheta\|_{V^1},$$

où c'' est une constante indépendante de m et $\beta(\cdot)$ est une fonction continue définie sur $[0, T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et telle que $\beta(0) = 0$. En outre, il est évident que

$$(Pr_m \rho^m(0) u^m(0) | \vartheta) = (Pr_m \rho_0^m u_0^m | \vartheta) \rightarrow (\rho_0 u_0 | \vartheta) \quad \text{pour } m \rightarrow \infty.$$

En ce qui concerne ρ^m , d'après le lemme 2.1 et en vertu de la condition (3.19), on a

$$\begin{aligned} \underline{c}_\rho &\leq \inf\{\rho^m(t, x) : (t, x) \in [0, T] \times O\} \leq \\ &\leq \sup\{\rho^m(t, x) : (t, x) \in [0, T] \times O\} \leq \bar{c}_\rho \end{aligned}$$

pour tout m . Finalement il est évident, en vertu de (3.20), que l'on a

$$G^m \rightarrow G$$

$$\text{dans } L^\infty(0, T; V^0) \text{ faible}^* \cap L^2(0, T; V^1) \text{ faible} \cap L^2(0, T; V^0) \text{ fort}.$$

Ces propriétés étant vérifiées, pour extraire de $\{(u^m, \rho^m)\}$ une sous-suite satisfaisant à (3.22)-(3.26), il suffit de rappeler le théorème de la compacité faible, le théorème d'Ascoli-Arzelà et le fait que l'ensemble

$$\{v : \|v\|_{L^2(0, T; V^1)}^2 + \sup_{\delta \in [0, T]} \delta^{-1/2} \int_0^{T-\delta} \|v(t+\delta) - v(t)\|_{V^0}^2 dt \leq c\}$$

est relativement compact dans $L^2(0, T; V^0)$ (voir [Lad]).

La relation (3.27) pour $\vartheta \in \bigcup_{m=1}^\infty V_m$ résulte de (3.24)-(3.26) et de la construction (3.20) de G^m . Mais pour tout $\vartheta \in V^1$ il existe

une suite $\{\vartheta_k\} \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$ qui l'approche. Donc, compte tenu du fait que $\rho v - \zeta_1 \in L^2(0, T; (L^2(O))^3)$, la relation (3.27) est vraie même pour $\vartheta \in V^1$ en général. Le lemme est démontré. ■

4. - Passage à la limite.

Dans le paragraphe précédent, nous avons construit une sous-suite convergente de solutions approchées. Il s'agit maintenant de vérifier que la limite de cette sous-suite satisfait aux relations (3.4)-(3.6), qui sont des formes faibles du problème (1.12)-(1.16). C'est par le passage à la limite qu'on va le vérifier et donc achever la démonstration du théorème 3.1.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.1. Pour éviter des notations trop compliquées, nous convenons d'écrire, dans cette démonstration, simplement m au lieu de m' pour désigner l'indice de la sous-suite obtenue dans le lemme 3.7.

Par la construction de ρ^m (voir le théorème 2.5 et le lemme 2.1), (u^m, ρ^m) satisfait à l'égalité

$$\int_0^T \int_O \rho^m(t, x) (\partial_t \psi(t, x) + u^m(t, x) \cdot \nabla \psi(t, x)) dx dt = - \int_O \rho_0^m(x) \psi(0, x) dx$$

pour tout $\psi \in C^1(0, T; H^1(O))$ tel que $\psi(T, \cdot) = 0$. Or, on voit aisément qu'en vertu de (3.19), (3.24), (3.25), on peut passer à la limite pour $m \rightarrow \infty$ dans cette égalité, ce qui prouve (3.6).

En ce qui concerne l'égalité (3.4), supposons avant tout que $\vartheta \in \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$. Il existe alors un m_0 tel que $\vartheta \in V_{m_0}$. En vertu de

(2.6)bis, on a pour $m \geq m_0$

$$\begin{aligned} (\rho^m \partial_t v^m | \vartheta) &= ((u^m \cdot \nabla \rho^m) v^m | \vartheta) + (\rho^m (u^m \cdot \nabla) \vartheta | v^m) - (\rho^m (u^m \cdot \nabla) G^m | \vartheta) \\ &\quad - (\nabla u^m | \nabla \vartheta) + (\rho^m f^m | \vartheta) \end{aligned}$$

où

$$v^m = u^m - G^m.$$

En intégrant cette égalité de 0 à t et en tenant compte de la relation (2.7)bis, on obtient

$$\begin{aligned} (\rho^m(t) v^m(t) | \vartheta) - (\rho_0^m u_0^m | \vartheta) &= \\ (3.28) \quad &= \int_0^t (\rho^m(s) (u^m(s) \cdot \nabla) \vartheta | u^m(s)) ds - \int_0^t (\nabla u^m(s) | \nabla \vartheta) ds \\ &\quad + \int_0^t (\rho^m(s) f^m(s) | \vartheta) ds - \int_0^t (\rho^m(s) (u^m(s) \cdot \nabla) \vartheta | G^m(s)) ds \\ &\quad - \int_0^t (\rho^m(s) (u^m(s) \cdot \nabla) G^m(s) | \vartheta) ds. \end{aligned}$$

Il n'est pas difficile de passer à la limite dans (3.28) en utilisant les relations (3.22)-(3.26). En effet, l'intégrale

$$I_1 = \int_0^t ((\rho^m(s) - \rho(s)) (u(s) \cdot \nabla) \vartheta | u(s)) ds$$

converge vers 0 grâce à (3.25). D'autre part, comme $\rho^m(t, x)$ est uniformément borné, en vertu de la relation (3.24) et de l'hypothèse $\vartheta \in V_{m_0}$, qui implique que $|\nabla \vartheta(x)| \leq c(m_0)$, les intégrales

$$I_2 = \int_0^t (\rho^m(s) ((u^m(s) - u(s)) \cdot \nabla) \vartheta | u^m(s) - u(s)) ds,$$

$$I_3 = \int_0^t (\rho^m(s) (u(s) \cdot \nabla) \vartheta | u^m(s) - u(s)) ds,$$

$$I_4 = \int_0^t (\rho^m(s) ((u^m(s) - u(s)) \cdot \nabla) \vartheta | u(s)) ds$$

convergent vers 0. Donc la différence

$$\int_0^t (\rho^m(s)(u^m(s) \cdot \nabla) \vartheta | u(s)) ds - \int_0^t (\rho(s)(u(s) \cdot \nabla) \vartheta | u(s)) ds = \\ = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

converge vers 0 pour $m \rightarrow \infty$.

Par un raisonnement analogue et en rappelant que la relation (3.20) et l'hypothèse $G \in C(0, T; V^1)$ impliquent, entre autres, la convergence $G^m \rightarrow G$ dans $L^2(0, T; V^1)$ fort, on voit que les deux dernières intégrales de (3.28) tendent vers

$$\int_0^t (\rho(s)(u(s) \cdot \nabla) \vartheta | G(s)) ds$$

et

$$\int_0^t (\rho(s)(u(s) \cdot \nabla) G(s) | \vartheta) ds$$

respectivement.

En vertu de (3.23), (3.25), il est évident que les intégrales

$$\int_0^t (\nabla u^m(s) | \nabla \vartheta) ds \quad \text{et} \quad \int_0^t (\rho^m(s) f^m(s) | \vartheta) ds$$

tendent vers

$$\int_0^t (\nabla u(s) | \nabla \vartheta) ds \quad \text{et} \quad \int_0^t (\rho(s) f(s) | \vartheta) ds$$

respectivement. D'autre part, en vertu de (3.26), $(\rho^m(t) v^m(t) | \vartheta)$ tend vers $(\zeta_1(t) | \vartheta)$. Finalement il est évident que $(\rho_0^m u_0^m | \vartheta)$ tend vers $(\rho_0 u_0 | \vartheta)$.

Donc, en ajoutant $(\rho(t) G(t) | \vartheta)$ aux deux membres de la limite pour $m \rightarrow \infty$ de (3.28) et en posant

$$\zeta(t) = \zeta_1(t) + \text{Pr} \rho(t) G(t),$$

on obtient précisément (3.4) pour $\vartheta \in \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$.

Pour un $\vartheta \in V^1$ en général, il suffit de construire une suite

$\{\vartheta_k\} \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$ telle que $\vartheta_k \rightarrow \vartheta$ dans V^1 . On voit aisément que dans tous les termes de (3.4) on peut passer à la limite pour $\vartheta_k \rightarrow \vartheta$, ce qui démontre (3.4) pour tout $\vartheta \in V^1$.

La relation (3.5) a déjà été obtenue dans (3.27). Le théorème est démontré. ■

5. - Démonstration des théorèmes 3.2, 3.3.

Le théorème 3.3 et donc le théorème 3.2 seront démontrés d'une manière analogue à la démonstration du théorème 3.2 de [BT]. Mais, dans notre cas, on a besoin de définir des topologies (ou, plus précisément, des métriques) adéquates.

Soit $\{\sigma_0^k\}$ une base normalisée de $L^1(O)$. Désignons par $(L^\infty(O) \text{ faible}^*)^*$ l'espace composé par les éléments de $L^\infty(O)$ et muni de la norme

$$(3.29) \quad \|\rho_0\|_{(L^\infty(O) \text{ faible}^*)^*} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |\langle \rho_0, \sigma_0^k \rangle|.$$

De manière analogue, soit $\{\sigma_k\}$ une base normalisée de $L^1([0, T] \times O)$. Désignons alors par $(L^\infty([0, T] \times O) \text{ faible}^*)^*$ l'espace composé par les éléments de $L^\infty([0, T] \times O)$ et muni de la norme

$$(3.30) \quad \|\rho\|_{(L^\infty([0, T] \times O) \text{ faible}^*)^*} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |\langle \rho, \sigma_k \rangle|.$$

L'examen des propriétés générales de ces espaces ne sera pas nécessaire pour la démonstration des théorèmes 3.2, 3.3; car le lemme 3.8 nous fournira leurs propriétés utiles pour notre cas particulier.

Posons

$$(3.31) \quad L(O)^+ = \{\rho_0 \in L^\infty(O) : \underline{c}_\rho \leq \rho_0(x) \leq \bar{c}_\rho \text{ p.p. dans } O\},$$

$$(3.32) \quad \begin{aligned} L([0,T] \times O)^+ &= \\ &= \{\rho \in L^\infty([0,T] \times O) : \underline{c}_\rho \leq \rho(t,x) \leq \bar{c}_\rho \text{ p.p. dans } [0,T] \times O\}. \end{aligned}$$

On a alors le

LEMME 3.8. Supposons que

$$\begin{aligned} \{\rho_0^n\} &\subset L^\infty(O)^+, \quad \rho_0 \in L^\infty(O)^+, \\ \{\rho^n\} &\subset L^\infty([0,T] \times O)^+, \quad \rho \in L^\infty([0,T] \times O)^+. \end{aligned}$$

Alors ρ_0^n converge vers ρ_0 dans $(L^\infty(O)\text{faible}^*)^*$ si et seulement si ρ_0^n converge vers ρ_0 dans $L^\infty(O)\text{faible}^*$, et, de même, ρ^n converge vers ρ dans $(L^\infty([0,T] \times O)\text{faible}^*)^*$ si et seulement si ρ^n converge vers ρ dans $L^\infty([0,T] \times O)\text{faible}^*$. $\square$

DÉMONSTRATION. Supposons que ρ_0^n converge vers ρ_0 dans $(L^\infty(O)\text{faible}^*)^*$. Soit $\sigma_0 \in L^1(O)$. On va démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = N(\varepsilon) < \infty$ tel que pour $n \geq N$ on ait

$$(3.33) \quad |\langle \rho_0^n, \sigma_0 \rangle - \langle \rho_0, \sigma_0 \rangle| \leq \varepsilon.$$

En effet, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\bar{\sigma}_0 \in L^1(O)$ tel que

$$\|\sigma_0 - \bar{\sigma}_0\|_{L^1(O)} \leq (4\bar{c}_\rho)^{-1}\varepsilon$$

et que $\bar{\sigma}_0$ soit une combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments $\sigma_0^1, \dots, \sigma_0^K$:

$$\bar{\sigma}_0 = \sum_{k=1}^K a_k \sigma_0^k \quad (a_k \in \mathbb{R}).$$

On a alors

$$\begin{aligned} |\langle \rho_0^n - \rho_0, \bar{\sigma}_0 \rangle| &\leq \sum_{k=1}^K |a_k| |\langle \rho_0^n - \rho_0, \sigma_0^k \rangle| \leq \\ &\leq (\max_{1 \leq k \leq K} |a_k|) K 2^K \|\rho_0^n - \rho_0\|_{(L^\infty(O)\text{faible}^*)^*}. \end{aligned}$$

Par hypothèse on peut choisir un nombre $N = N(K) = N(\varepsilon)$ tel que, pour $n \geq N$, on ait

$$\|\rho_0^n - \rho_0\|_{(L^\infty(O)\text{faible}^*)^*} \leq (\max_{1 \leq k \leq K} |a_k|)^{-1} K^{-1} 2^{-K-1} \varepsilon.$$

On a donc, pour $n \geq N$,

$$|\langle \rho_0^n - \rho_0, \bar{\sigma}_0 \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, puisque $\rho_0^n, \rho_0 \in L^\infty(O)^+$, on a évidemment

$$|\langle \rho_0^n - \rho_0, \sigma_0 - \bar{\sigma}_0 \rangle| \leq 2\bar{c}_\rho \|\sigma_0 - \bar{\sigma}_0\|_{L^1(O)} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit (3.33).

On a donc

$$\langle \rho_0^n, \sigma_0 \rangle \rightarrow \langle \rho_0, \sigma_0 \rangle \quad \text{pour } n \rightarrow \infty$$

pour tout $\sigma_0 \in L^1(O)$, ce qui signifie que ρ_0^n converge vers ρ_0 dans $L^\infty(O)\text{faible}^*$.

On suppose maintenant que ρ_0^n converge vers ρ_0 dans $L^\infty(O)\text{faible}^*$ et on tâche de démontrer que, pour $\varepsilon > 0$, il existe $N = N(\varepsilon) < \infty$ tel que pour $n \geq N$ on ait

$$(3.34) \quad \|\rho_0^n - \rho_0\|_{(L^\infty(O)\text{faible}^*)^*} \leq \varepsilon.$$

En effet, puisque $\rho_0^n, \rho_0 \in L^\infty(O)^+$, on a

$$|\langle \rho_0^n - \rho_0, \sigma_0^k \rangle| \leq 2\bar{c}_\rho \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Donc, en choisissant $K = K(\varepsilon)$ de sorte que $2^{-K} \leq (4\bar{c}_\rho)^{-1}\varepsilon$, on a

$$\sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |\langle \rho_0^n - \rho_0, \sigma_0^k \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{pour tout } n).$$

D'autre part, comme, pour tout k fixé, $\langle \rho_0^n, \sigma^k \rangle$ converge vers $\langle \rho_0, \sigma^k \rangle$ pour $n \rightarrow \infty$, il existe un $N = N(K) = N(\varepsilon)$ tel que pour $n \geq N$ on ait

$$\sum_{k=1}^K \frac{1}{2^k} |\langle \rho_0^n - \rho_0, \sigma^k \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit (3.34). Ceci signifie que ρ_0^n converge vers ρ_0 dans $(L^\infty(\mathcal{O})\text{faible}^*)^\#$.

Donc, l'équivalence entre la convergence de $\{\rho_0^n\} \subset L^\infty(\mathcal{O})^+$ dans $L^\infty(\mathcal{O})\text{faible}^*$ et celle dans $(L^\infty(\mathcal{O})\text{faible}^*)^\#$ est démontrée.

L'équivalence entre la convergence de $\{\rho^n\} \subset L^\infty([0, T] \times \mathcal{O})^+$ dans $L([0, T] \times \mathcal{O})\text{faible}^*$ et celle dans $(L^\infty([0, T] \times \mathcal{O})\text{faible}^*)^\#$ se démontre d'une manière tout à fait analogue. ■

On a aussi le

LEMME 3.9. Si $\{\rho_0^n\} \subset L^\infty(\mathcal{O})^+$ et si $\{\rho_0^n\}$ est une suite de Cauchy dans la métrique de $(L^\infty(\mathcal{O})\text{faible}^*)^\#$, alors il existe la limite $\rho_0 \in L^\infty(\mathcal{O})$:

$$\rho_0^n \rightarrow \rho_0 \quad \text{dans } (L^\infty(\mathcal{O})\text{faible}^*)^\#$$

et la limite ρ_0 appartient à $L^\infty(\mathcal{O})^+$. De même, si $\{\rho^n\} \subset L^\infty([0, T] \times \mathcal{O})^+$ et si $\{\rho^n\}$ est une suite de Cauchy dans la métrique de $(L^\infty([0, T] \times \mathcal{O})\text{faible}^*)^\#$, alors il existe la limite $\rho \in L^\infty([0, T] \times \mathcal{O})$:

$$\rho^n \rightarrow \rho \quad \text{dans } (L^\infty([0, T] \times \mathcal{O})\text{faible}^*)^\#$$

et la limite ρ appartient à $L^\infty([0, T] \times \mathcal{O})^+$. ■

DÉMONSTRATION. Comme $\{\rho_0^n\} \subset L^\infty(\mathcal{O})^+$ par hypothèse, il existe

une sous-suite $\{\rho_0^{n'}\}$ qui converge vers un $\rho_0 \in L^\infty(\mathcal{O})^+$ dans $L^\infty(\mathcal{O})\text{faible}^*$. D'après le lemme 3.8, on a

$$\rho_0^{n'} \rightarrow \rho_0 \quad \text{dans } (L^\infty(\mathcal{O})\text{faible}^*)^\#.$$

Comme d'autre part par hypothèse $\{\rho_0^n\}$ est une suite de Cauchy dans $(L^\infty(\mathcal{O})\text{faible}^*)^\#$, on en déduit que

$$\rho_0^n \rightarrow \rho_0 \quad \text{dans } (L^\infty(\mathcal{O})\text{faible}^*)^\#.$$

On démontre de la même manière la thèse concernant la convergence de $\{\rho^n\} \subset L^\infty([0, T] \times \mathcal{O})^+$. ■

On va maintenant démontrer, comme dans le cas du corollaire 2.1 de [BT], le lemme suivant:

LEMME 3.10. Soit Λ la multi-application qui à l'élément

$$(u_0, \rho_0, f, G) \in X^+ = V^0 \times L^\infty(\mathcal{O})^+ \times L^1(0, T; (L^2(\mathcal{O}))^3) \times C(0, T; V^1)$$

associe l'ensemble des éléments

$$(u, \rho, \zeta_1) \in Y^+ = L^2(0, T; V^1) \times L^\infty([0, T] \times \mathcal{O})^+ \times C(0, T; V^{-1})$$

tels que, si on pose $\zeta = \zeta_1 + \rho G$, les relations (3.4)-(3.6) soient vérifiées. Le graphe de Λ dans la topologie $\tau(X) \times \tau(Y)$ est fermé, où

$$\tau(X) = V^0 \times (L^\infty(\mathcal{O})\text{faible}^*)^\# \times L^1(0, T; (L^2(\mathcal{O}))^3) \times C(0, T; V^1),$$

$$\tau(Y) = L^2(0, T; V^1) \times (L^\infty([0, T] \times \mathcal{O})\text{faible}^*)^\# \times C(0, T; V^{-1}). \quad \square$$

DÉMONSTRATION. Soit $(x^n, y^n) = (u_0^n, \rho_0^n, f^n, G^n, u^n, \rho^n, \zeta_1^n)$ une suite contenue dans le graphe de Λ (et donc même dans $X^+ \times Y^+$) et convergente dans la topologie $\tau(X) \times \tau(Y)$. Puisque la relation (3.4) avec $\zeta^n = \zeta_1^n + \rho^n G^n$ est vérifiée, $u_0^n, \rho_0^n, f^n, G^n, u^n, \rho^n, \zeta_1^n$ satisfont, pour tout n , à la relation

$$(\zeta_1^n(t) | \vartheta) - (\rho_0^n u_0^n | \vartheta) =$$

$$\begin{aligned}
(3.35) \quad &= \int_0^t (\rho^n(s) (u^n(s) \cdot \nabla) \theta |u^n(s)|) ds - \int_0^t (\nabla u^n(s) | \nabla \theta) ds \\
&+ \int_0^t (\rho^n(s) f^n(s) | \theta) ds - \int_0^t (\rho^n(s) (u^n(s) \cdot \nabla) \theta | G^n(s)) ds \\
&- \int_0^t (\rho^n(s) (u^n(s) \cdot \nabla) G^n(s) | \theta) ds \quad \forall t \in [0, T], \forall \theta \in V^1.
\end{aligned}$$

En vertu des lemmes 3.8, 3.9, on vérifie aisément qu'on peut passer à la limite dans (3.35). Donc, si on ajoute $(\rho(t)G(t)|\theta)$ aux deux membres de la limite pour $n \rightarrow \infty$ de (3.35), on a (3.4) pour $(u_0, \rho_0, f, G, u, \rho, \zeta_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x^n, y^n)$ et $\zeta = \zeta_1 + \rho G$.

En utilisant des arguments analogues, on démontre sans difficulté que les relations (3.5), (3.6) sont elles aussi vérifiées pour $(u_0, \rho_0, f, G, u, \rho, \zeta_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x^n, y^n)$ et $\zeta = \zeta_1 + \rho G$.

En outre, comme on le déduit immédiatement du lemme 3.8, si $\{\rho_0^n\} \subset L^\infty(O)^+$ et si $\rho_0^n \rightarrow \rho_0$ dans $(L^\infty(O) \text{ faible}^*)^*$, alors $\rho_0 \in L^\infty(O)^+$. De manière analogue, si $\{\rho^n\} \subset L^\infty([0, T] \times O)^+$ et si $\rho^n \rightarrow \rho$ dans $(L^\infty([0, T] \times O) \text{ faible}^*)^*$, alors $\rho \in L^\infty([0, T] \times O)^+$.

Il en résulte que $(u_0, \rho_0, f, G, u, \rho, \zeta_1)$ appartient au graphe de Λ , c'est-à-dire que le graphe de Λ est fermé. Le lemme est démontré. ■

On rappelle maintenant le théorème affirmant l'existence d'une section mesurable de la multi-application de graphe fermé à valeurs dans les parties fermées non vides.

THÉORÈME 3.11. Soient $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ deux espaces de Banach séparables et $\tilde{\Lambda}$ une multi-application de graphe fermé de $\tilde{X}$ à valeurs dans les parties fermées non vides de $\tilde{Y}$. Alors il existe

une application univoque σ de $\tilde{X}$ dans $\tilde{Y}$, telle que $\sigma(x) \in \tilde{\Lambda}(x)$, $\forall x \in \tilde{X}$, et qui est mesurable pour toute mesure de Radon définie sur la tribu borélienne de $\tilde{X}$. □

DÉMONSTRATION. On la trouve par exemple dans l'Appendice de [BT]. ■

Les lemmes que nous avons établis ci-dessus et le théorème 3.11 nous permettent de démontrer le théorème 3.3.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.3. Soient Λ , X^* , Y^* , $\tau(X)$, $\tau(Y)$ comme dans le lemme 3.10. On déduit du lemme 3.9 que X^* est un sous-ensemble fermé de l'espace topologique $\tau(X)$. On rappelle également que les espaces $\tau(X)$, $\tau(Y)$ sont séparables. Alors, on voit aisément que les complétés des espaces composés par les éléments de $\tau(X)$ et par ceux de $\tau(Y)$, complétés par rapport aux topologies $\tau(X)$, $\tau(Y)$, sont des espaces de Banach séparables, que nous désignons par $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ (on rappelle que les espaces $(L^\infty(O) \text{ faible}^*)^*$ et $(L^\infty([0, T] \times O) \text{ faible}^*)^*$ définis au début de ce paragraphe ne sont pas complets). En rappelant le lemme 3.10, on peut prolonger sans difficulté la multi-application Λ définie sur X^* en une multi-application $\tilde{\Lambda}$ définie sur $\tilde{X}$ de sorte que le graphe de $\tilde{\Lambda}$ soit fermé dans la topologie $\tilde{X} \times \tilde{Y}$ et que les valeurs de $\tilde{\Lambda}$ soient des ensembles fermés non vides de $\tilde{Y}$.

Cela étant, d'après le théorème 3.11, il existe une section mesurable σ de $\tilde{\Lambda}$. Donc, en la restreignant à X^* , on obtient une application mesurable $\tilde{\Lambda}: X^*$ (muni de la topologie $\tau(X)$) $\rightarrow Y^*$ (muni de la topologie $\tau(Y)$) telle que

$$\tilde{\lambda}(x) \in \Lambda(x) \quad \forall x \in X^+.$$

Définissons l'application $\kappa: Y^+ \times C(0, T; V^1) \rightarrow Y_0$ par la relation

$$\kappa(y, G) = (u, \rho, \zeta_1 + \rho G) \quad (y = (u, \rho, \zeta_1) \in Y^+),$$

où

$$Y_0 = L^2(0, T; V^1) \times L^\infty([0, T] \times \mathcal{O})_{\text{faible}^*} \times L^\infty(0, T; V^{-1})_{\text{faible}^*}.$$

En rappelant le lemme 3.8, on vérifie facilement que κ est mesurable même si Y^+ est muni de la topologie $\tau(Y)$. Le lemme 3.8 implique aussi que Γ reste mesurable même si X^+ est muni de la topologie $\tau(X)$. Si on pose

$$\lambda(x) = \kappa(\tilde{\lambda}(x), G) \quad (x = (u_0, \rho_0, f, G) \in X^+),$$

$$\Phi = \lambda \circ \Gamma,$$

il s'ensuit alors que l'application Φ est mesurable et que, pour presque tout $\omega \in \Omega$, $\Phi(\omega) = (u(\omega), \rho(\omega), \zeta(\omega))$ est bien défini et satisfait à (3.4)–(3.6). Le théorème est démontré. ■

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.2. Le théorème 3.2 est un cas particulier du théorème 3.3, il a donc déjà été démontré. ■

CHAPITRE 4

THEOREMES D'EXISTENCE (II) – PROBLEME DE MARTINGALES –

1. – Enoncés des théorèmes.

Dans le chapitre précédent, nous avons établi le théorème d'existence pour les équations de Navier-Stokes stochastiques non homogènes dont la perturbation stochastique G est une variable aléatoire à valeurs dans $C(0, T; V^1)$ (Théorème 3.2). Le fait que le processus stochastique G soit à valeurs dans V^1 est essentiel pour que la méthode semi-déterministe illustrée dans le chapitre précédent soit applicable aux équations de Navier-Stokes stochastiques homogènes ou non homogènes.

D'autre part, l'utilisation de l'intégrale stochastique nous offre une autre possibilité de l'étude des équations stochastiques. En particulier, la formulation des équations sous la forme dite «problème de martingales» nous permettra de considérer une autre classe de processus stochastiques comme perturbation stochastique aux équations de Navier-Stokes stochastiques homogènes et non homogènes. La perturbation stochastique pourra en effet être un processus à valeurs dans V^0 , mais non nécessairement à valeurs dans V^1 . Il faudra naturellement que le processus stochastique soit tel qu'on puisse définir une intégrale stochastique par rapport à lui.

Dans son travail [V1], [V2], Viot a démontré l'existence d'une solution faible du problème de martingales correspondant à l'équation stochastique du type Navier-Stokes. Il a considéré comme perturbation stochastique un processus de Wiener à valeurs dans un espace de Hilbert séparable H , qui, pour les équations de Navier-Stokes stochastiques, sera l'espace V^0 . Il a utilisé, dans la démonstration du théorème d'existence, la propriété particulière du processus de Wiener. Mais on ne peut pas appliquer cette méthode directement aux équations de Navier-Stokes stochastiques non homogènes, car l'intégrale stochastique

$$\int \rho dW$$

n'est plus un processus de Wiener si ρ n'est pas constante.

Donc, pour démontrer le théorème d'existence pour les équations de Navier-Stokes stochastiques non homogènes, il m'a fallu introduire un espace Y produit d'espaces fonctionnels Y^u , Y^ρ , Y^G , etc... tel que $u(\omega; \cdot, \cdot)$, $\rho(\omega; \cdot, \cdot)$, $G(\omega; \cdot, \cdot)$, etc... appartiennent respectivement à Y^u , Y^ρ , Y^G , etc... (voir le paragraphe 3 de ce chapitre). L'introduction de l'espace produit Y nous permettra de trouver une convergence de mesures de probabilité qui représentent les solutions approchées. En outre, si on se sert de l'espace produit Y , il ne sera plus nécessaire de se limiter au cas où il s'agit d'une perturbation stochastique sous la forme d'un processus de Wiener et on pourra plutôt considérer directement une classe de processus stochastiques beaucoup plus grande que celle des processus de Wiener.

Pour arriver à cette idée, les conversations que j'ai eues

avec le prof. A. Cruzeiro sur son travail [Cr] m'ont été utiles. D'autre part, c'est au travail [V2] de Viot que je dois plusieurs points techniques de ce chapitre.

Nous allons maintenant énoncer les résultats. Nous commençons par préciser les conditions sur les données G , H , f , u_0 , ρ_0 :

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P}) \text{ est une base stochastique sur} \\ \text{laquelle le processus } H \text{ et, éventuellement, } G \text{ sont} \\ \text{définis,} \end{array} \right.$$

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} H \text{ est une martingale continue à valeurs dans } V^0 \text{ telle} \\ \text{que } H(0) = 0 \text{ p.s. et qu'il existe un processus} \\ \text{stochastique } Q \text{ à valeurs dans } \mathcal{L}^1(V^0; V^0) \text{ tel que} \\ Q \in L^1(0, T; \mathcal{L}^1(V^0; V^0)) \text{ p.s.,} \\ \langle H \rangle(t) = \int_0^t Q(s) ds \text{ p.s.,} \\ \mathbb{E} \|Q\|_{L^1(0, T; \mathcal{L}^1(V^0; V^0))}^2 < \infty, \end{array} \right.$$

où $\langle H \rangle$ est le processus croissant associé à H , tandis que $\mathcal{L}^1(V^0; V^0) = V^0 \hat{\otimes}_1 V^0$ est l'espace des opérateurs nucléaires de V^0 à V^0 ; la norme d'un élément q de cet espace est définie par

$$\|q\|_{\mathcal{L}^1(V^0; V^0)} = \|q\|_{\hat{\otimes}_1} = \sup \sum_{n=1}^{\infty} (\langle q, a_n \rangle | b_n \rangle),$$

où le sup est pris par rapport à tous les systèmes orthonormaux possibles $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ de V^0 (pour ces notions, voir par exemple [M], [Pa] (en particulier §2, §3));

$$(4.3) \quad f \in L^1(0, T; (L^2(O))^3),$$

$$(4.4) \quad u_0 \in V^0,$$

$$(4.5) \quad \begin{cases} \rho_0 \in L^\infty(O), \\ 0 < c_{-\rho} = \operatorname{ess\,inf}_{x \in O} \rho_0(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_{x \in O} \rho_0(x) = \bar{c}_\rho(x) < \infty. \end{cases}$$

On suppose éventuellement donné un processus stochastique G satisfaisant aux conditions suivantes:

$$(4.6) \quad \begin{cases} G \text{ est un processus stochastique adapté (par rapport à } \mathcal{F}_t), \text{ continu à valeurs dans } V^0 \text{ et à variation bornée avec} \\ \mathbb{E}(\operatorname{Var}_{V^0}(G; 0, T))^4 < \infty, \end{cases}$$

$$(4.7) \quad \begin{cases} \text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe une fonction réelle } \gamma(\varepsilon; \cdot) \text{ définie sur } [0, T], \text{ continue et telle que } \gamma(\varepsilon; 0) = 0 \text{ et que} \\ \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega: \forall \delta \in [0, T], S(\omega; \delta) \leq \gamma(\varepsilon; \delta)\}) \geq 1 - \varepsilon \\ \text{où} \\ S(\omega; \delta) = \sup\{\operatorname{Var}_{V^0}(G(\omega); t_1, t_2): [t_1, t_2] \subset [0, T], t_2 - t_1 \leq \delta\}, \end{cases}$$

$$(4.8) \quad \begin{cases} G \text{ est à variation bornée à valeurs dans } V^1 \text{ et tel que} \\ \mathbb{E}(\operatorname{Var}_{V^1}(G; 0, T))^2 < \infty, \end{cases}$$

où $\operatorname{Var}_{V^s}(G(\omega); t_1, t_2)$ désigne la variation totale de $G(\omega) = G(\omega; \cdot)$ dans l'intervalle $[t_1, t_2]$ par rapport à la métrique de V^s ($s = 0, 1$), et que H est tel que

$$(4.9) \quad \begin{cases} \text{il existe } p_1, p_2 > 1 \text{ tels que} \\ p_2 > p_1(p_1 - 1)^{-1} \\ \text{et que} \\ Q \in L^{p_1}(O, T; \mathcal{L}^1(V^0; V^0)) \text{ p.s.,} \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{l} \mathbb{E} \|Q\|_{L^1(O, T; \mathcal{L}^1(V^0; V^0))}^{p_2} < \infty. \end{array} \right.$$

Les théorèmes que nous allons démontrer sont les suivants.

THÉORÈME 4.1. Supposons que les hypothèses (4.1)-(4.5) sont vérifiées. Alors il existe une base stochastique

$(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in [0, T]}, \tilde{\mathbb{P}})$ et des variables aléatoires

$$u : \tilde{\Omega} \rightarrow L^2(O, T; V^0),$$

$$\rho : \tilde{\Omega} \rightarrow L^\infty([0, T] \times O) \text{ (muni de la topologie faible*)},$$

$$\tilde{H} : \tilde{\Omega} \rightarrow C(O, T; V^0),$$

telles que les conditions suivantes (4.10)-(4.15) soient vérifiées:

$$(4.10) \quad \begin{cases} u \in L^2(O, T; V^1) \quad \tilde{\mathbb{P}}\text{-p.s.}, \\ c_{-\rho} \leq \operatorname{ess\,inf}_{(t, x) \in [0, T] \times O} \rho(t, x) \leq \operatorname{ess\,sup}_{(t, x) \in [0, T] \times O} \rho(t, x) \leq \bar{c}_\rho \quad \tilde{\mathbb{P}}\text{-p.s.}, \end{cases}$$

$$(4.11) \quad \begin{cases} \text{pour toute fonction } \varphi : C(O, T; V^0) \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue et bornée, on a} \\ \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \varphi(H) = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \varphi(\tilde{H}), \end{cases}$$

$$(4.12) \quad \tilde{H} \text{ est une martingale par rapport à } (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in [0, T]}, \tilde{\mathbb{P}}),$$

$$\begin{cases} \text{pour toute fonction } \psi_r(\cdot) = \psi_r(\tilde{\omega}; \cdot) : \tilde{\Omega} \rightarrow C^1(O, T; \mathbb{R}) \\ \text{(avec } r \in [0, T]) \text{ bornée (c'est-à-dire } \exists c < \infty \text{ tel que } \|\psi_r(\tilde{\omega}; \cdot)\|_{C^1(O, T; \mathbb{R})} \leq c \forall \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}), \text{ mesurable par rapport à } \tilde{\mathcal{F}}_r \text{ et telle que, si } r > 0, \text{ alors} \\ \psi_r(t) = 0 \quad \forall t \in [0, r] \cup \{T\}, \\ \text{ou, si } r = 0, \text{ alors} \\ \psi_r(T) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
(4.13) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \text{ et pour tout } \vartheta \in V^1 \text{ on a} \\ \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[\int_0^T \psi'_r(t) \varphi((\rho(t)u(t)|\vartheta)) dt \right. \\ \quad + \int_0^T \psi_r(t) \varphi'((\rho(t)u(t)|\vartheta)) \{ (\rho(t)(u(t) \cdot \nabla) \vartheta | u(t)) \\ \quad \quad \quad - (\nabla u(t) | \nabla \vartheta) + (\rho(t)f(t)|\vartheta) \} dt \\ \quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^T \psi_r(t) \varphi''((\rho(t)u(t)|\vartheta)) (Prp(t)\vartheta \otimes Prp(t)\vartheta), d\langle \tilde{H} \rangle(t) \right] = \\ \quad = - \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \psi_r(0) \varphi((\rho_0 u_0 | \vartheta)), \end{array} \right. \\
(4.14) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } \psi \in C(0, T; H^1(O)) \cap C^1(0, T; L^1(O)) \text{ tel que} \\ \psi(T, \cdot) = 0, \text{ on a} \\ \int_0^T \int_O \rho(t, x) [\partial_t \psi(t, x) + u(t, x) \cdot \nabla \psi(t, x)] dx dt = \\ \quad = - \int_O \rho_0(x) \psi(0, x) dx \quad \tilde{\mathbb{P}}\text{-p.s.} \square \end{array} \right.
\end{aligned}$$

(Comme le processus croissant $\langle \tilde{H} \rangle$ héritera une propriété analogue à (4.2), l'élément $d\langle \tilde{H} \rangle(t)$ pourra être remplacé par $\langle \tilde{H} \rangle'(t)dt$.)

THÉOREME 4.2. Supposons que les hypothèses (4.1)-(4.9) sont vérifiées. Alors il existe une base stochastique $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in [0, T]}, \tilde{\mathbb{P}})$ et des variables aléatoires

$$u : \tilde{\Omega} \rightarrow L^2(0, T; V^0),$$

$$\rho : \tilde{\Omega} \rightarrow L^\infty([0, T] \times O) \text{ (muni de la topologie faible*)},$$

$$\zeta : \tilde{\Omega} \rightarrow C(0, T; V^{-1}),$$

$$\tilde{G} : \tilde{\Omega} \rightarrow C(0, T; V^0),$$

$$\tilde{H} : \tilde{\Omega} \rightarrow C(0, T; V^0),$$

pour lesquelles sont vérifiées, outre les conditions (4.10), (4.12), (4.14), les conditions suivantes (4.11)bis, (4.15)-(4.17):

$$\begin{aligned}
(4.11)\text{bis} \quad & \left\{ \begin{array}{l} \text{pour toute fonction } \varphi : C(0, T; V^0) \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue et} \\ \text{bornée, on a} \\ \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \varphi(G + H) = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \varphi(\tilde{G} + \tilde{H}), \end{array} \right. \\
(4.15) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } \tilde{\mathbb{P}}\text{-presque tout } \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}, \tilde{G}(\tilde{\omega}; \cdot) \text{ est une fonction à} \\ \text{variation bornée, à valeurs dans } V^1, \end{array} \right. \\
(4.16) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } \vartheta \in V^1, \text{ le processus} \\ M^\vartheta(t) = (\zeta(t)|\vartheta) - (\rho_0 u_0 | \vartheta) - \int_0^t \langle \rho(s)\vartheta, d\tilde{G}(s) \rangle \\ \quad - \int_0^t [(\rho(s)(u(s) \cdot \nabla) \vartheta | u(s)) - (\nabla u(s) | \nabla \vartheta) \\ \quad \quad \quad + (\rho(s)f(s)|\vartheta)] ds \\ \text{est une martingale par rapport à } (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in [0, T]}, \tilde{\mathbb{P}}) \\ \text{avec le processus croissant associé} \\ \langle M^\vartheta \rangle(t) = \int_0^t \langle Prp(s)\vartheta \otimes Prp(s)\vartheta, d\langle \tilde{H} \rangle(s) \rangle \quad \tilde{\mathbb{P}}\text{-p.s.}, \end{array} \right. \\
\text{où } \int_0^t \langle \rho(s)\vartheta, d\tilde{G}(s) \rangle & \text{ est calculé comme intégrale de Stieltjes,}
\end{aligned}$$

$$(4.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } \vartheta \in V^1 \text{ on a} \\ \int_0^T |(\rho(t)u(t) - \zeta(t)|\vartheta)| dt = 0 \quad \tilde{\mathbb{P}}\text{-p.s.}, \\ (\zeta(0) - \rho_0 u_0 | \vartheta) = 0 \quad \tilde{\mathbb{P}}\text{-p.s.} \square \end{array} \right.$$

Le problème formulé dans ces théorèmes est une forme faible du problème (1.12)-(1.16) dans lequel G est remplacé par H ou par $G + H$. En effet, comme la condition (4.17) est une forme faible de la relation

$$\zeta(t) = Prp(t)u(t),$$

la condition (4.16) est une forme faible de la relation

$$\begin{aligned}
& (\rho(t)u(t)|\vartheta) - (\rho_0 u_0|\vartheta) = \\
& = \int_0^t [(\rho(s)(u(s) \cdot \nabla)\vartheta|u(s)) - (\nabla u(s)|\nabla\vartheta) + (\rho(s)f(s)|\vartheta)]ds \\
& + \int_0^t \langle \rho(s)\vartheta, d\tilde{G}(s) \rangle + \int_0^t \langle \rho(s)\vartheta, d\tilde{H}(s) \rangle,
\end{aligned}$$

ce que nous pouvons vérifier sans difficulté en rappelant les propriétés des intégrales stochastiques par rapport à une martingale. Cette dernière égalité est évidemment une forme faible de l'équation (1.13). La condition (4.13) est une forme faible de la relation (4.16) jointe à (4.17) pour $G \equiv 0$. Il est, en outre, clair que la condition (4.14) est une forme faible de l'équation (1.14) (voir aussi la remarque qui suit l'énoncé du théorème 3.3).

Les conditions $G(0) = 0$ p.s., $H(0) = 0$ p.s. ne sont évidemment pas essentielles. Nous les supposons vérifiées pour que la démonstration ne soit pas inutilement compliquée.

Quant à la condition (4.16), il nous convient de l'exprimer sous la forme (4.19) donnée par la remarque qui suit.

REMARQUE 4.3. Supposons que les hypothèses (4.1)-(4.9) sont vérifiées et que toute la thèse du théorème 4.2 sauf la condition (4.16) est vérifiée. Supposons en outre qu'on a

$$(4.18) \quad E_{\mathbb{P}} N_{\varphi}^{\vartheta}(t)^2 < \infty \quad \forall t \in [0, T].$$

Alors la condition (4.16) est équivalente à la condition suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \text{ et pour tout } \vartheta \in V^1, \text{ le processus} \\ N_{\varphi}^{\vartheta}(t) = \varphi((\zeta(t)|\vartheta)) - \varphi((\rho_0 u_0|\vartheta)) \end{array} \right.$$

$$(4.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \int_0^t \varphi'((\zeta(s)|\vartheta)) [(\rho(s)(u(s) \cdot \nabla)\vartheta|u(s)) \\ \quad - (\nabla u(s)|\nabla\vartheta) + (\rho(s)f(s)|\vartheta)]ds \\ - \int_0^t \langle \varphi'((\zeta(s)|\vartheta))\rho(s)\vartheta, d\tilde{G}(s) \rangle \\ - \frac{1}{2} \int_0^t \langle \varphi''((\zeta(s)|\vartheta))(\text{Pr}\rho(s)\vartheta\otimes\text{Pr}\rho(s)\vartheta), d\langle\tilde{H}\rangle(s) \rangle \end{array} \right.$$

est une martingale par rapport à $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in [0, T]}, \tilde{\mathbb{P}})$.

DÉMONSTRATION. La démonstration est analogue à celle du théorème 1.2 de [V2], chap.1. En effet, comme on le voit facilement, si $\varphi(t)$ est une fonction réelle continue et si $\alpha(t)$ est une fonction réelle continue à variation bornée, alors l'intégrale de Stieltjes

$$\psi(t) = \int_0^t \varphi(s) d\alpha(s)$$

est une fonction continue à variation bornée. Il s'ensuit que, si $\eta(t)$ est une fonction continue, alors on a

$$\int_0^t \eta(s) d\psi(s) = \int_0^t \eta(s) \varphi(s) d\alpha(s)$$

et que, si $\eta(t)$ est continue et si $\beta(t)$ est continue et à variation bornée, alors on a, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
& \left(\int_0^t \eta(s) d\beta(s) \right) \left(\int_0^t \varphi(s) d\alpha(s) \right) = \\
& = \int_0^t \left(\int_0^s \eta(r) d\beta(r) \right) \varphi(s) d\alpha(s) + \int_0^t \left(\int_0^s \varphi(r) d\alpha(r) \right) \eta(s) d\beta(s).
\end{aligned}$$

Cela étant, pour déduire de (4.16) la relation (4.19), il suffit d'appliquer la formule d'Ito.

Pour démontrer la réciproque, on suppose la condition (4.19) vérifiée. Alors, comme dans la démonstration du théorème 1.2 de

[V2], chap.1, en passant à la limite, on voit que $N_{\varphi}^{\vartheta}(t)$ est une martingale locale pour tout $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$. En particulier, le sont

$$N_{\varphi(p)=p}^{\vartheta}(t) = M^{\vartheta}(t) \text{ et } N_{\varphi(p)=p}^{\vartheta}{}^2(t).$$

En outre, grâce à (4.18), $M^{\vartheta}(t)$ est une martingale.

D'autre part, la construction de $M^{\vartheta}(t)$ indiquée dans (4.16) et les propriétés de $\zeta(t)$, $\rho(t)$, $u(t)$, $f(t)$ entraînent que $M^{\vartheta}(t)$ est continu. Donc, par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} A(t) &\equiv M^{\vartheta}(t)^2 - N_{\varphi(p)=p}^{\vartheta}{}^2(t) - \int_0^t \langle Pr\rho(s)\vartheta \otimes Pr\rho(s)\vartheta, d\langle \tilde{H} \rangle(s) \rangle = \\ &= 2(\rho_0 u_0 | \vartheta) M^{\vartheta}(t) \\ &\quad + 2 \int_0^t (M^{\vartheta}(t) - M^{\vartheta}(s)) [(\rho(s)(u(s) \cdot \nabla) \vartheta | u(s)) \\ &\quad \quad - (\nabla u(s) | \nabla \vartheta) + (\rho(s)f(s) | \vartheta)] ds \\ &\quad + 2 \int_0^t \langle (M^{\vartheta}(t) - M^{\vartheta}(s)) \rho(s) \vartheta, d\tilde{G}(s) \rangle = \\ &= 2 \int_0^t \left[\int_0^s \{ (\rho(r)(u(r) \cdot \nabla) \vartheta | u(r)) - (\nabla u(r) | \nabla \vartheta) + (\rho(r)f(r) | \vartheta) \} dr \right. \\ &\quad \left. + \int_0^s \langle \rho(r) \vartheta, d\tilde{G}(r) \rangle \right] dM^{\vartheta}(s). \end{aligned}$$

Donc, comme $M^{\vartheta}(t)$ est une martingale, $A(t)$ l'est aussi. En adjoignant à $A(t)$ une martingale locale $N_{\varphi(p)=p}^{\vartheta}{}^2(t)$ et en tenant compte de (4.18), on voit que le processus

$$M^{\vartheta}(t)^2 - \int_0^t \langle Pr\rho(s)\vartheta \otimes Pr\rho(s)\vartheta, d\langle \tilde{H} \rangle(s) \rangle$$

est une martingale, d'où (4.16). ■

2. - Estimations des solutions approchées.

Comme l'addition formelle du processus stochastique $G \equiv 0$ au processus H dans les formules du théorème 4.1 ne modifie évidemment rien, nous considérons les solutions approchées pour les équations en présence du processus stochastique $G + H$ au lieu du seul processus H et cela même pour le théorème 4.1. Cette convention nous permettra d'appliquer directement à la démonstration du théorème 4.1, comme à celle du théorème 4.2, les estimations des solutions approchées que nous allons établir.

Posons

$$(4.20) \quad u_0^m = Pr_m u_0,$$

$$(4.21) \quad G^m = Pr_m G,$$

$$(4.22) \quad H^m = Pr_m H.$$

Soient en outre $\{\rho_0^m\}$, $\{f_0^m\}$ deux suites de fonctions satisfaisant aux conditions suivantes:

$$(4.23) \quad \rho_0^m \in C^1(\mathcal{O}), \quad \underline{c}_\rho \leq \rho_0^m(x) \leq \bar{c}_\rho \quad \forall x \in \mathcal{O}, \quad \rho_0^m \rightarrow \rho_0 \text{ dans } L^3(\mathcal{O}),$$

$$(4.24) \quad \begin{cases} f^m \in L^2(\mathcal{O}, T; (L^2(\mathcal{O}))^3), \quad f^m \rightarrow f \text{ dans } L^1(\mathcal{O}, T; (L^2(\mathcal{O}))^3), \\ \forall [s, t] \subset [0, T] \\ \int_s^t \|f^m(r)\|_{(L^2(\mathcal{O}))^3}^3 dr \leq \int_s^t \|f(r)\|_{(L^2(\mathcal{O}))^3}^3 dr. \end{cases}$$

On voit immédiatement que les données u_0^m , ρ_0^m , f^m , $G^m + H^m$ qui satisfont à (4.20)-(4.24) vérifient les conditions des données du problème (2.6)-(2.10) dans lequel nous avons à substituer $G^m + H^m$ à G . Donc, d'après le théorème 2.6, il existe une paire de

variables aléatoires $(\rho, u) = (\rho^m, u^m)$ à valeurs dans $C(0, T; V_m) \times C^1([0, T] \times O)$ et une seule qui satisfait à (2.6)-(2.10) avec les données $u_0^m, \rho_0^m, f^m, G^m + H^m$ vérifiant les conditions (4.20)-(4.24).

Dans la suite, nous allons démontrer, pour ces solutions approchées (u^m, ρ^m) , les lemmes 4.4, 4.5, 4.6, 4.9 et le corollaire du lemme 4.5 en supposant vérifiées les conditions (4.1)-(4.6). D'autre part, le lemme 4.7 sera démontré sous les hypothèses (4.7), (4.9) outre les conditions (4.1)-(4.6).

LEMME 4.4. Supposons que les hypothèses (4.1)-(4.6) sont vérifiées. On a alors

$$\begin{aligned} & (\rho^m(t)u^m(t)|u^m(t)) - (\rho_0^m u_0^m|u_0^m) = \\ & = - 2 \int_0^t \int_O |\nabla u^m(s, x)|^2 dx ds + 2 \int_0^t (\rho^m(s)f^m(s)|u^m(s)) ds \\ & + 2 \int_0^t \langle \rho^m(s)u^m(s), dG^m(s) \rangle + 2 \int_0^t \langle \rho^m(s)u^m(s), dH^m(s) \rangle \\ & + \int_0^t \langle \rho^m(s), d\langle H^m \rangle(s) \rangle \quad \text{p.s.,} \end{aligned} \quad (4.25)$$

où $\langle H^m \rangle$ est le processus croissant associé à la martingale H^m , processus à valeurs dans $V_m \otimes V_m$, tandis que $\langle \rho^m(s), \cdot \rangle = \langle \rho^m(\omega; s), \cdot \rangle$ qui figure dans la dernière intégrale doit être considéré comme l'élément de $\mathcal{L}(V_m, \mathcal{L}(V_m, \mathbb{R}))$ défini par la relation

$$\langle \rho^m(\omega; s), v_1 \otimes v_2 \rangle = (\rho^m(\omega; s)v_1|v_2) \quad \text{pour } v_1, v_2 \in V_m. \square$$

DÉMONSTRATION. Posons

$$\begin{aligned} v^m &= u^m - G^m - H^m, \\ z_j^m(\omega; t) &= (v^m(\omega; t)|e_j) \quad (j = 1, \dots, m). \end{aligned}$$

Alors les raisonnements de la démonstration du théorème 2.5 s'appliquent à ces fonctions. Il en résulte avant tout que la fonction $z_j^m(\omega; \cdot)$ appartient à l'ensemble

$$K = \{z \in C(0, T; \mathbb{R}^m) : |z(t)| \leq (\varphi(t))^{1/2}\}$$

où $\varphi(t)$ est la fonction définie par (2.21)-(2.23), et par conséquent elle satisfait à la condition (2.19). Par suite, on déduit du lemme 2.4 que

$$\frac{d}{dt} z_j^m(\omega; \cdot) \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m),$$

ou encore

$$(4.26) \quad \partial_t v^m \in L^2(0, T; V_m) \quad \text{p.s..}$$

D'autre part, comme $\rho^m \in C^1([0, T] \times O)$ p.s., on a

$$(4.27) \quad \partial_t \rho^m \in C(0, T; C(O)) \quad \text{p.s..}$$

Comme on le voit facilement, le fait que $G^m + H^m \in C(0, T; V_m)$ p.s. et les relations (4.26)-(4.27) légitiment l'application de la formule d'Ito à

$$\begin{aligned} & (\rho^m(t)u^m(t)|u^m(t)) = \\ & = (\rho^m(t)(v^m(t) + G^m(t) + H^m(t))|v^m(t) + G^m(t) + H^m(t)). \end{aligned}$$

Il est commode, dans l'application de la formule d'Ito, de considérer $\rho^m(\omega; t)$ comme élément de $\mathcal{L}(V_m, \mathcal{L}(V_m, \mathbb{R}))$ (défini dans l'énoncé du lemme). La dérivée de $\langle \rho^m(\omega; t), \cdot \rangle$ par rapport à t est l'élément de $\mathcal{L}(V_m, \mathcal{L}(V_m, \mathbb{R}))$, élément défini par $\partial_t \rho^m(\omega; t)$. La formule d'Ito nous donne donc

$$\begin{aligned} & (\rho^m(t)u^m(t)|u^m(t)) - (\rho_0^m u_0^m|u_0^m) = \\ (4.28) \quad & = \int_0^t ((\partial_s \rho^m(s))u^m(s)|u^m(s)) ds + 2 \int_0^t \langle u^m(s), \rho^m(s) du^m(s) \rangle \end{aligned}$$

$$+ \int_0^t \langle \rho^m(s), d\langle H^m \rangle(s) \rangle \quad \text{p.s.}$$

Ici la formule d'Ito peut être considérée comme celle appliquée à des processus stochastiques à valeurs dans un espace de Hilbert séparable V_m (on peut trouver, par exemple, dans [Pa] les détails de la théorie des intégrales stochastiques de processus à valeurs dans un espace de Hilbert séparable). Mais, comme V_m est un espace de dimension finie, on peut utiliser la représentation vectorielle et matricielle pour réduire le problème en une formule de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Dans les deux cas, on parvient au même résultat (4.28).

D'autre part, on déduit de (2.7) que

$$\begin{aligned} & ((\partial_s \rho^m(s)) u^m(s) | u^m(s)) = \\ (4.29) \quad & = - ((u^m(s) \cdot \nabla \rho^m(s)) u^m(s) | u^m(s)) = \\ & = 2(\rho^m(s)(u^m(s) \cdot \nabla) u^m(s) | u^m(s)) \quad \text{p.s.} \end{aligned}$$

Finalement, comme les fonctions $y_j(t) = (u^m(t) | e_j)$ sont continues, on multiplie les équation (2.6) ($j = 1, \dots, m$) par $(y_j(t))$ et on les additionne par rapport à j , de sorte qu'on a

$$\begin{aligned} (\rho^m du^m | u^m) &= - (\rho^m(u^m \cdot \nabla) u^m | u^m) dt - (\nabla u^m | \nabla u^m) dt \\ &+ (\rho^m f^m | u^m) dt + (\rho^m dG^m | u^m) + (\rho^m dH^m | u^m). \end{aligned}$$

En substituant cette dernière relation et l'égalité (4.29) dans (4.28), on obtient précisément (4.25). ■

Précisons que l'intégrale stochastique

$$\int_0^t \langle \rho^m(s) u^m(s), dH^m(s) \rangle$$

par rapport à la martingale H^m dans (4.25) est bien définie. En effet, la formule d'Ito appliquée à $(\rho^m(t) u^m(t) | u^m(t))$ est obtenue par la substitution de $t \wedge T_n$ à t dans (4.28) et par le passage à la limite pour $n \rightarrow \infty$, où T_n est le temps d'arrêt défini par

$$T_n = T_n(\omega) = \inf\{0 \leq s \leq t : (\|u^m(\omega; s)\|_{V^0}) \vee (\|\langle H^m \rangle(\omega; s)\|_{Tr}) > n\}.$$

C'est-à-dire, comme (4.28) avec $t \wedge T_n$ est évidemment vrai pour tout n et que, grâce à la continuité de u^m et celle de $\langle H^m \rangle$, on a

$$T_n(\omega) \rightarrow t \text{ p.s. pour } n \rightarrow \infty,$$

(4.28) est vérifiée également avec t .

LEMME 4.5. Supposons que les hypothèses (4.1)-(4.6) sont vérifiées. Alors il existe une constante C indépendante de m et telle que, pour toutes les solutions approchées (u^m, ρ^m) , on ait

$$(4.30) \quad \mathbb{E} \left[\int_0^T \|u^m(t)\|_{V^1}^2 dt \right]^2 + \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u^m(t)\|_{V^0}^4 \leq C. \quad \square$$

DÉMONSTRATION. On déduit de (4.25) que

$$\begin{aligned} & \bar{c}_{\rho^0} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u^m(t)\|_{V^0}^2 + 2 \int_0^T \|u^m(t)\|_{V^1}^2 dt \leq \\ (4.31) \quad & \leq (\rho_0^m u_0^m | u_0^m) + 2 \bar{c}_{\rho} \left[\int_0^T \|f^m(t)\|_{(L^2(O))}^2 dt \right] \sup_{0 \leq t \leq T} \|u^m(t)\|_{V^0} \\ & + 2 \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \langle \rho^m(s) u^m(s), dG^m(s) \rangle \right| \\ & + 2 \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \langle \rho^m(s) u^m(s), dH^m(s) \rangle \right| \\ & + \bar{c}_{\rho} \|Q\|_{L^1(0,T; \mathcal{L}^1(V^0; V^0))} \quad \text{p.s.} \end{aligned}$$

(où on a utilisé le fait que

$$\text{Var}_{\mathcal{L}^1(V^0; V^0)}(\langle H^m \rangle; 0, T) \leq \|Q\|_{L^1(0,T; \mathcal{L}^1(V^0; V^0))}.$$

Si on considère le carré de (4.31), on a

$$\begin{aligned}
(4.32) \quad & \mathbb{E}_0 \sup_{0 \leq t \leq T} \|u^m(t)\|_{V^0}^4 + \left[\int_0^T \|u^m(t)\|_{V^0}^2 dt \right]^2 \leq \\
& \leq c \left[(\rho_0^m u_0^m | u_0^m)^2 + \left(\int_0^T \|f^m(t)\|_{(L^2(O))}^2 dt \right)^4 \right. \\
& \quad + \mathbb{E}_0 \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \langle \rho^m(s) u^m(s), dG^m(s) \rangle \right|^2 \\
& \quad + \mathbb{E}_0 \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \langle \rho^m(s) u^m(s), dH^m(s) \rangle \right|^2 \\
& \quad \left. + \|Q\|_{L^1(O, T; \mathcal{L}^1(V^0; V^0))}^2 \right] \quad \text{p.s.},
\end{aligned}$$

où c est une constante indépendante de m .

Comme G^m est un processus à variation bornée, on a

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_0 \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \langle \rho^m(s) u^m(s), dG^m(s) \rangle \right| \leq \\
& \leq \bar{c}_\rho \sup_{0 \leq t \leq T} \left[\left(\sup_{0 \leq s \leq t} \|u^m(s)\|_{V^0} \right) \text{Var}_{V^0}(G^m; 0, t) \right]
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
(4.33) \quad & \mathbb{E}_0 \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \langle \rho^m(s) u^m(s), dG^m(s) \rangle \right|^2 \leq \\
& \leq \frac{1}{4} \mathbb{E}_0 \sup_{0 \leq t \leq T} \|u^m(t)\|_{V^0}^4 + 4(\bar{c}_\rho)^4 \text{EVar}(G^m; 0, T)^4.
\end{aligned}$$

D'autre part, le processus

$$\int_0^t \langle \rho^m(s) u^m(s), dH^m(s) \rangle$$

étant une intégrale stochastique par rapport à une martingale, est lui aussi une martingale. Donc, en vertu de la seconde inégalité de Doob (voir par exemple [IW], chap.1, Th.6.10), des propriétés connues des intégrales stochastiques par rapport à une martingale (voir par exemple [M], §10, ou [Pa]) et des hypothèses (4.2), (4.22), on a

$$\begin{aligned}
(4.34) \quad & \mathbb{E}_0 \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \langle \rho^m(s) u^m(s), dH^m(s) \rangle \right|^2 \leq \\
& \leq 4 \mathbb{E}_0 \left| \int_0^T \langle \rho^m(t) u^m(t), dH^m(t) \rangle \right|^2 \leq \\
& \leq 4 \mathbb{E}_0 \int_0^T \|Pr_m \rho^m(t) u^m(t)\|_{V^0}^2 \text{Tr} \langle H^m \rangle(t) dt \leq \\
& \leq c \left[\mathbb{E}_0 \sup_{0 \leq t \leq T} \|Pr_m \rho^m(t) u^m(t)\|_{V^0}^4 \right]^{1/2} \left[\mathbb{E}_0 \|Q\|_{L^1(O, T; \mathcal{L}^1(V^0; V^0))}^2 \right]^{1/2} \leq \\
& \leq \frac{1}{4} \mathbb{E}_0 \sup_{0 \leq t \leq T} \|u^m(t)\|_{V^0}^4 + c' \mathbb{E}_0 \|Q\|_{L^1(O, T; \mathcal{L}^1(V^0; V^0))}^2,
\end{aligned}$$

où Tr désigne la trace, c'est-à-dire

$$\text{Tr} A = \sum_{j=1}^{\infty} (\langle A, e_j \rangle | e_j \rangle) \quad (A \in \mathcal{L}^1(V^0; V^0)).$$

Comme on le voit aisément, $\text{Tr} A$ jouit de la propriété

$$|\text{Tr} A| \leq \|A\|_{\mathcal{L}_1} \quad \forall A \in \mathcal{L}^1(V^0; V^0);$$

en particulier, on a l'égalité si A est autoadjoint défini positif, comme dans le cas du processus croissant associé à une martingale (voir [Pa]).

Compte tenu des conditions (4.2)-(4.6), (4.20)-(4.24) et des estimations (4.33), (4.34), on déduit de l'espérance mathématique de (4.32) l'inégalité (4.30) avec une constante C qui ne dépend pas de m . ■

COROLLAIRE. Il existe une constante C indépendante de m et telle que pour toutes les solutions approchées (u^m, ρ^m) on a

$$(4.35) \quad \mathbb{E}_0 \int_0^T \|u^m(t)\|_{V^0}^2 dt + \mathbb{E}_0 \sup_{0 \leq t \leq T} \|u^m(t)\|_{V^0}^2 \leq C. \quad \square$$

DÉMONSTRATION. Le corollaire résulte immédiatement du lemme 4.5. ■

LEMME 4.6. Supposons que les hypothèses (4.1)-(4.6) sont vérifiées. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $c(\varepsilon)$ indépendante de m et telle que pour tout m on ait

$$(4.36) \quad \mathbb{P}(\{\omega: \sup_{0 \leq \delta \leq T} \delta^{-1/2} \int_0^{T-\delta} \|u^m(t+\delta) - u^m(t)\|_{V^0}^2 dt \leq c(\varepsilon)\}) \geq 1 - \varepsilon. \quad \square$$

DÉMONSTRATION. On rappelle d'abord la relation

$$d(\rho^m(t)u^m(t)|U) = \langle \rho^m(t)U, du^m(t) \rangle + ((\partial_t \rho^m(t))u^m(t)|U)dt$$

pour $U \in V_m$. Alors les relations (2.6), (2.7) où G est remplacé par $G + H$ impliquent que, pour tout $U \in V_m$, on a

$$(4.37) \quad d(\rho^m u^m|U) = [(\rho^m(u^m \cdot \nabla)U|u^m) - (\nabla u^m|\nabla U) + (\rho^m f^m|U)]dt + \langle \rho^m U, dG^m \rangle + \langle \rho^m U, dH^m \rangle \quad \text{p.s.}$$

On pose

Pour U dans U , prenons

$$U = U(t) = u^m(t+\delta) - u^m(t)$$

avec $\delta \in]0, T]$, $t \in [0, T-\delta]$ et on substitue cette expression dans (4.37); c'est légitime, car $u^m(t+\delta) - u^m(t)$ appartient à V_m . Puis on intègre les deux membres de (4.37) de t à $t+\delta$. On peut maintenant raisonner comme dans le cas de la déduction de (3.14) de (3.12). Dans le calcul de l'intégrale, il faut seulement faire attention au fait que, à la différence de (3.12), il s'agit ici de $u = u^m$ au lieu de v et de $U = U(t)$ au lieu de V , ce qui toutefois ne cause aucune difficulté. Donc, compte tenu aussi de la relation

$$((\rho^m(t+\delta) - \rho^m(t))u^m(t)|U(t)) =$$

$$= \int_t^{t+\delta} (\rho^m(s)u^m(s)|\nabla(u^m(t) \cdot U(t))ds \quad \text{p.s.},$$

on tire de l'intégrale de (4.37) l'inégalité

$$(4.38) \quad \frac{1}{c} \|U(t)\|_{V^0}^2 \leq \int_t^{t+\delta} \langle \rho^m(s)U(t), dG^m(s) \rangle + \int_t^{t+\delta} \langle \rho^m(s)U(t), dH^m(s) \rangle + \int_t^{t+\delta} A_0(t;s)ds \quad \text{p.s.},$$

où

$$A_0(t;s) = \|u^m(s)\|_{V^1} \|u^m(t)\|_{V^1} (\|u^m(t)\|_{V^1} + \|u^m(t+\delta)\|_{V^1}) + \|u^m(s)\|_{V^1} (\|u^m(s)\|_{V^1} + 1) (\|u^m(t)\|_{V^1} + \|u^m(t+\delta)\|_{V^1}) + \|f^m(s)\|_{(L^2(O))}^3 (\|u^m(t)\|_{V^0} + \|u^m(t+\delta)\|_{V^0}).$$

Si on calcule chaque intégrale de la dernière expression de (4.38) d'une manière analogue à la démonstration du lemme 3.3,

on a

$$\begin{aligned} \int_0^{T-\delta} dt \left[\int_t^{t+\delta} \|u^m(s)\|_{V^1} ds \|u^m(t)\|_{V^1} \|u^m(t+\delta)\|_{V^1} \right] &\leq \delta^{1/2} \|u^m\|_{L^2(O, T; V^1)}^3, \\ \int_0^{T-\delta} dt \left[\int_t^{t+\delta} \|u^m(s)\|_{V^1}^2 ds \|u^m(t)\|_{V^1} \right] &\leq \delta^{1/2} \|u^m\|_{L^2(O, T; V^1)}^3, \\ \int_0^{T-\delta} dt \left[\int_t^{t+\delta} \|f^m(s)\|_{(L^2(O))}^3 ds \|u^m(t)\|_{V^0} \right] &\leq \delta^{1/2} \|u^m\|_{L^1(O, T; V^1)} \|f^m\|_{L^1(O, T; (L^2(O))^3)}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\delta^{-1/2} \int_0^{T-\delta} dt \int_t^{t+\delta} A_0(t;s)ds \leq c \|u^m\|_{L^2(O, T; V^1)} (1 + \|u^m\|_{L^2(O, T; V^1)}^2).$$

Comme le deuxième membre de cette inégalité ne dépend pas de δ et qu'il existe, en vertu du lemme 4.5 et de son corollaire, une constante c indépendante de m et telle que

$$\mathbb{E} \|u^m\|_{L^2(0,T;V^1)}^3 \leq (\mathbb{E}(\int_0^T \|u^m(t)\|_{V^1}^2 dt))^{1/2} (\mathbb{E}(\int_0^T \|u^m(t)\|_{V^1}^2 dt))^2)^{1/2} \leq c,$$

on a

$$(4.39) \quad \mathbb{E} \sup_{0 \leq \delta \leq T} \delta^{-1/2} \int_0^{T-\delta} dt \int_t^{t+\delta} A_0(t;s) ds \leq c',$$

où c' est une constante qui ne dépend pas de m .

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} & \int_0^{T-\delta} dt \int_t^{t+\delta} \langle \rho^m(s) U(t), dG^m(s) \rangle \leq \\ & \leq 2\bar{c} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u^m(t)\|_{V^0} \int_0^{T-\delta} \text{Var}_{V^0}(G^m; t, t+\delta) dt = \\ & = 2\bar{c} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u^m(t)\| \left[\int_{T-\delta}^T \text{Var}_{V^0}(G^m; 0, t) dt - \int_0^\delta \text{Var}_{V^0}(G^m; 0, t) dt \right] \leq \\ & \leq 2\bar{c} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u^m(t)\|_{V^0} \delta \text{Var}_{V^0}(G; 0, T). \end{aligned}$$

Par conséquent, compte tenu du lemme 4.5 et de la condition (4.6),

on a

$$(4.40) \quad \mathbb{E} \sup_{0 \leq \delta \leq T} \delta^{-1/2} \int_0^{T-\delta} dt \int_t^{t+\delta} \langle \rho^m(s) U(t), dG^m(s) \rangle \leq c$$

avec une constante c indépendante de m .

Pour estimer

$$\int_0^{T-\delta} dt \int_t^{t+\delta} \langle \rho^m(s) U(t), dH^m(s) \rangle,$$

on rappelle que $\langle \rho^m(s) \cdot, \cdot \rangle \in C(t, t+\delta; \mathcal{L}(V_m, V_m))$ et que $U(t)$ ne

dépend pas de s . Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\delta} \langle \rho^m(s) U(t), dH^m(s) \rangle &= (U(t) | \int_t^{t+\delta} \langle \rho^m(s) \cdot, dH^m(s) \rangle) = \\ &= (U(t) | H_\rho^m(t+\delta) - H_\rho^m(t)), \end{aligned}$$

où

$$H_\rho^m(t) = \int_0^t \langle \rho^m(s) \cdot, dH^m(s) \rangle.$$

On a donc

$$\begin{aligned} & \delta^{-1/2} \int_0^{T-\delta} dt \int_t^{t+\delta} \langle \rho^m(s) U(t), dH^m(s) \rangle \leq \\ (4.41) \quad & \leq \delta^{-1/2} \left[\int_0^{T-\delta} \|U(t)\|_{V^0}^2 dt \right]^{1/2} \left[\int_0^{T-\delta} (H_\rho^m(t+\delta) - H_\rho^m(t))^2 dt \right]^{1/2} \leq \\ & \leq \varepsilon \delta^{-1/2} \int_0^{T-\delta} \|U(t)\|_{V^0}^2 dt \\ & + (4\varepsilon)^{-1} \delta^{-1/2} \int_0^{T-\delta} (H_\rho^m(t+\delta) - H_\rho^m(t))^2 dt. \end{aligned}$$

Pour estimer le dernier terme de (4.41), on définit

$$I_n =]2^{-n}T, 2^{-n+1}T]$$

et on prolonge H_ρ^m à droite en posant $H_\rho^m(t) = H_\rho^m(T)$ pour $t \geq T$. On

remarque que $H_\rho^m(t)$ est une martingale. Par conséquent, en vertu de

la deuxième inégalité de Doob et du fait que $|H_\rho^m(t)|^2 - \text{Tr} \langle H_\rho^m \rangle(t)$

est une martingale réelle (pour la définition de Tr , voir

l'explication qui suit (4.34)), on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sup_{\delta \in I_n} \delta^{-1/2} \int_0^{T-\delta} (H_\rho^m(t+\delta) - H_\rho^m(t))^2 dt \leq \\ & \leq 2^{n/2} T^{-1/2} \mathbb{E} \int_0^{T-2^{-n}T} \left[\sup_{t \leq s \leq t+2^{-n+1}T} (H_\rho^m(s) - H_\rho^m(t))^2 \right] dt \leq \\ & \leq 2^{n/2} T^{-1/2} \int_0^{T-2^{-n}T} 4 \mathbb{E} (H_\rho^m(t+2^{-n+1}T) - H_\rho^m(t))^2 dt = \\ & = 2^{n/2} T^{-1/2} 4 \int_0^{T-2^{-n}T} \mathbb{E} (\text{Tr} \langle H_\rho^m \rangle(t+2^{-n+1}T) - \text{Tr} \langle H_\rho^m \rangle(t)) dt = \\ & = 2^{n/2} T^{-1/2} 4 \mathbb{E} \left[\int_{T-2^{-n}T}^{T+2^{-n}T} \text{Tr} \langle H_\rho^m \rangle(t) dt - \int_0^{2^{-n+1}T} \text{Tr} \langle H_\rho^m \rangle(t) dt \right] \leq \end{aligned}$$

$$\leq 2^{n/2} T^{-1/2} \delta \cdot 2^{-n} T \mathbb{E} \text{Tr} \langle H_\rho^m \rangle (T) \leq$$

$$\leq 2^{-n/2} T^{1/2} \delta (\bar{c}_\rho)^2 \mathbb{E} \|Q\|_{L^1(0,T; \mathcal{L}^1(V^0; V^0))} \equiv 2^{-n/2} c_1.$$

Puisque $]0, T] = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, on a pour tout $\varepsilon_0 > 0$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\{\omega: \sup_{0 \leq \delta \leq T} \delta^{-1/2} \int_0^{T-\delta} (H_\rho^m(t+\delta) - H_\rho^m(t))^2 dt \geq \frac{1}{\varepsilon_0}\}) \leq \\ (4.42) \quad & \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{\omega: \sup_{\delta \in I_n} \delta^{-1/2} \int_0^{T-\delta} (H_\rho^m(t+\delta) - H_\rho^m(t))^2 dt \geq \frac{1}{\varepsilon_0}\}) \leq \\ & \leq \varepsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n/2} c_1 \equiv \varepsilon_0 c', \end{aligned}$$

où c' est une constante finie qui ne dépend pas de m .

Il résulte de (4.38)-(4.42) qu'il existe une constante $c < \infty$ qui ne dépend pas de m et telle que pour tout $\varepsilon > 0$ on ait

$$\mathbb{P}(\{\omega: \sup_{0 \leq \delta \leq T} \delta^{-1/2} \int_0^{T-\delta} \|U(t)\|_V^2 dt \geq \frac{1}{\varepsilon}\}) \leq \varepsilon c,$$

d'où le lemme. ■

LEMME 4.7. Supposons que, outre les hypothèses (4.1)-(4.6), les hypothèses (4.7), (4.9) sont elles aussi vérifiées. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction réelle $\beta(\cdot) = \beta(\varepsilon; \cdot)$ définie sur $[0, T]$, continue, indépendante de m et telle que $\beta(\varepsilon; 0) = 0$ et que, pour toutes les solutions approchées (u^m, ρ^m) , on ait

$$\begin{aligned} (4.43) \quad & \mathbb{P}(\{\omega: \forall \delta \in [0, T], \forall \vartheta \in V^1, S_1(m, \omega; \delta, \vartheta) \leq \|\vartheta\|_V \beta(\varepsilon; \delta)\}) \geq \\ & \geq 1 - \varepsilon, \end{aligned}$$

où

$$S_1(m, \omega; \delta, \vartheta) =$$

$$= \sup\{|(Pr_m \rho^m(\omega; t) u^m(\omega; t) - Pr_m \rho^m(\omega; s) u^m(\omega; s))| \vartheta| : 0 \leq s \leq t \leq T, t-s \leq \delta\}. \square$$

DÉMONSTRATION. Comme Pr_m est autoadjoint et que $\vartheta_m = Pr_m \vartheta \in V_m$, en substituant ϑ_m à U dans (4.37), on a

$$\begin{aligned} d(\rho^m u^m | \vartheta_m) &= [(\rho^m(u^m \cdot \nabla) \vartheta_m | u^m) - (\nabla u^m | \nabla \vartheta_m) + (\rho^m f^m | \vartheta_m)] dt \\ &\quad + \langle \rho^m \vartheta_m, dG^m \rangle + \langle \rho^m \vartheta_m, dH^m \rangle \quad \text{p.s..} \end{aligned}$$

Donc, en intégrant cette égalité de s à t , on a

$$\begin{aligned} & |(\rho^m(t) u^m(t) - \rho^m(s) u^m(s)) | \vartheta_m| \leq \\ (4.44) \quad & \leq \left| \int_s^t [(\rho^m(r) (u^m(r) \cdot \nabla) \vartheta_m | u^m(r)) - (\nabla u^m(r) | \nabla \vartheta_m) \right. \\ & \quad \left. + (\rho^m(r) f^m(r) | \vartheta_m)] dr \right| \\ & \quad + \left| \int_s^t \langle \rho^m(r) \vartheta_m, dG^m(r) \rangle \right| + \left| \int_s^t \langle \rho^m(r) \vartheta_m, dH^m(r) \rangle \right|. \end{aligned}$$

On a, comme dans la démonstration du lemme 3.6,

$$\begin{aligned} & \left| \int_s^t (\rho^m(r) (u^m(r) \cdot \nabla) \vartheta_m | u^m(r)) dr \right| \leq \\ & \leq c \delta^{1/4} \left(\sup_{0 \leq r \leq T} \|u^m(r)\|_{V^0} \right)^{1/2} \|u^m\|_{L^2(0,T;V^1)} \|\vartheta\|_{V^1}, \\ & \left| \int_s^t (\nabla u^m(r) | \nabla \vartheta_m) dr \right| \leq c \delta^{1/2} \|u^m\|_{L^2(0,T;V^1)} \|\vartheta\|_{V^1}, \\ & \left| \int_s^t (\rho^m(r) f^m(r) | \vartheta_m) dr \right| \leq c \int_s^t \|f^m(r)\|_{(L^2(O))^3} dr \|\vartheta\|_{V^1}. \end{aligned}$$

Par conséquent, grâce à (4.3), (4.24), (4.35), on voit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction réelle $\beta_0(\cdot) = \beta_0(\varepsilon; \cdot)$ définie sur $[0, T]$, continue, indépendante de m et telle que $\beta_0(\varepsilon; 0) = 0$ et que pour tout m on ait

$$(4.45) \quad \mathbb{P}(\{\omega: \forall \delta \in [0, T], \forall \vartheta \in V^1, S_2(m, \omega; \delta, \vartheta) \leq \|\vartheta\|_{V^1} \beta_0(\varepsilon; \delta)\}) \geq 1 - \varepsilon,$$

où

$$\begin{aligned} S_2(m, \omega; \delta, \vartheta) &= \\ &= \sup\left\{\left|\int_s^t [(\rho^m(\omega; r)(u^m(\omega; r) \cdot \nabla) \vartheta_m | u^m(\omega; r)) - (\nabla u^m(\omega; r) | \vartheta_m) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\rho^m(\omega; r) f^m(\omega; r) | \vartheta_m)] dr\right| : 0 \leq s \leq t \leq T, t-s \leq \delta\right\}. \end{aligned}$$

D'autre part, comme on a

$$\left|\int_s^t \langle \rho^m(r) \vartheta_m, dG^m(r) \rangle\right| \leq \bar{c}_\rho \|\vartheta\|_{V^0} \text{Var}_{V^0}(G; s, t),$$

en vertu de (4.7) on a pour tout m

$$(4.46) \quad \mathbb{P}(\{\omega: \forall \delta \in [0, T], \forall \vartheta \in V^1, S_3(m, \omega; \delta, \vartheta) \leq \bar{c}_\rho \|\vartheta\|_{V^1} \gamma(\varepsilon; \delta)\}) \geq 1 - \varepsilon,$$

où

$$S_3(m, \omega; \delta, \vartheta) = \sup\left\{\left|\int_s^t \langle \rho^m(\omega; r) \vartheta_m, dG^m(\omega; r) \rangle\right| : 0 \leq s \leq t \leq T, t-s \leq \delta\right\}$$

et $\gamma(\varepsilon; \cdot)$ est la fonction donnée dans (4.7).

Pour estimer

$$\sup\left|\int_s^t \langle \rho^m(r) \vartheta_m, dH^m(r) \rangle\right|,$$

nous considérons $\langle \rho^m(r) \cdot, \cdot \rangle$ comme élément de $\mathcal{L}(V_m, V_m)$ et donc

$$\int_0^s \langle \rho^m(r) \cdot, dH^m(r) \rangle$$

comme martingale à valeurs dans V_m . Nous admettons pour le moment

que la martingale

$$A(t) = \int_0^t \langle \rho^m(r) \cdot, dH^m(r) \rangle$$

satisfait à la condition

$$(4.47) \quad \begin{cases} \exists p > 0, \alpha > 0, c > 0 \text{ tels que} \\ \forall [s, t] \subset [0, T] \quad \mathbb{E}(\text{Tr}\langle A \rangle(t) - \text{Tr}\langle A \rangle(s))^p \leq c(t-s)^{1+\alpha} \end{cases}$$

(pour la définition de Tr , voir l'explication qui suit (4.34)).

Alors, d'après le lemme 4.8, qu'on va voir ci-dessous, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction réelle $\beta_1(\cdot) = \beta_1(\varepsilon; \cdot)$ continue sur $[0, T]$ telle que $\beta_1(0) = 0$ et que

$$\mathbb{P}(\{\omega: \forall \delta \in [0, T] \sup\{\|A(t) - A(s)\|_{V^0} : 0 \leq s \leq t \leq T, t-s \leq \delta\} \leq \beta_1(\varepsilon; \delta)\}) \geq 1 - \varepsilon$$

et donc

$$(4.48) \quad \mathbb{P}(\{\omega: \forall \delta \in [0, T], \forall \vartheta \in V^1, S_4(m, \omega; \delta, \vartheta) \leq \|\vartheta\|_{V^1} \beta_1(\varepsilon; \delta)\}) \geq 1 - \varepsilon,$$

où

$$S_4(m, \omega; \delta, \vartheta) = \sup\left\{\left|\int_s^t \langle \rho^m(r) \vartheta_m, dH^m(r) \rangle(\omega)\right| : 0 \leq s \leq t \leq T, t-s \leq \delta\right\}.$$

Démontrons maintenant que la condition (4.47) est effectivement vérifiée. On a en effet

$$\begin{aligned} \text{Tr}\langle A \rangle(t) - \text{Tr}\langle A \rangle(s) &= \text{Tr} \int_s^t \langle \rho^m(r) \cdot, dH^m(r) \rangle \leq \\ &\leq \bar{c}_\rho \|\langle H \rangle(t) - \langle H \rangle(s)\|_{\mathbb{A}_1} = \bar{c}_\rho \left\| \int_s^t Q(r) dr \right\|_{\mathbb{A}_1} \leq \\ &\leq \bar{c}_\rho (t-s)^{(p_1-1)/p_1} \|Q\|_{L^1(0, T; \mathcal{L}^1(V^0; V^0))}^{p_1} \end{aligned}$$

Donc, en vertu de la condition (4.9), on a, pour tout $[s, t] \subset [0, T]$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\text{Tr}\langle A \rangle(t) - \text{Tr}\langle A \rangle(s))^{p_2} &\leq \\ &\leq (\bar{c}_\rho)^{p_2} (t-s)^{p_2(p_1-1)/p_1} \mathbb{E}\|Q\|_{L^1(0, T; \mathcal{L}^1(V^0; V^0))}^{p_2} \end{aligned}$$

C'est-à-dire, la condition (4.47) est vérifiée avec

$$p = p_2,$$

$$\alpha = (p_1 p_2 - p_1 - p_2) / p_1 > 0,$$

$$0 < c = (\bar{c}_\rho)^{p_2} \mathbb{E} \|Q\|_{L^1(0,T; \mathcal{X}^1(V^0; V^0))}^{p_2} < \infty.$$

Pour conclure la démonstration, il suffit de définir la fonction

$$\beta(\varepsilon; \delta) = \beta_0(\varepsilon; \delta) + \bar{c}_\rho \gamma(\varepsilon; \delta) + \beta_1(\varepsilon; \delta),$$

qui, en vertu de (4.44), (4.45), (4.46), (4.48), satisfait à l'hypothèse du lemme. ■

LEMME 4.8. Soit M une martingale à valeurs dans un espace de Hilbert séparable H . S'il existe $p > 0$, $\alpha > 0$, $c > 0$ tels que M satisfasse à (4.47) (où naturellement A est remplacée par M), alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction réelle $\varphi(\cdot) = \varphi(\varepsilon; \cdot)$ continue sur $[0, T]$ et telle que $\varphi(0) = 0$ et que

$$\mathbb{P}(\{\omega: \forall \delta \in [0, T] \sup\{\|M(t) - M(s)\|_H: 0 \leq s \leq t \leq T, t-s \leq \delta\} \leq \varphi(\varepsilon; \delta)\}) \geq 1 - \varepsilon. \quad \square$$

DÉMONSTRATION. C'est le lemme 2.2 de [V2], chap.1. Voir donc [V2] pour la démonstration. ■

LEMME 4.9. Supposons que les hypothèses (4.1)-(4.6) sont vérifiées. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c(\varepsilon)$ indépendante de m et telle que pour tout m on ait

$$(4.49) \quad \mathbb{P}(\{\omega: \forall \delta \in [0, T], \forall \pi \in W_{6/5}^1(0), \forall t \in [0, T-\delta],$$

$$|(\rho^m(\omega; t+\delta) - \rho^m(\omega; t)|\pi)| \leq c(\varepsilon) \delta^{1/2} \|\nabla \pi\|_{(L^{6/5}(0))^{3}}\}) \geq 1 - \varepsilon. \quad \square$$

DÉMONSTRATION. Puisque ρ^m satisfait presque sûrement à (2.6), on a

$$(\rho^m(t+\delta) - \rho^m(t)|\pi) = \int_t^{t+\delta} (\rho^m(s) u^m(s) |\nabla \pi|) ds \quad \text{p.s.},$$

et donc

$$|(\rho^m(t+\delta) - \rho^m(t)|\pi)| \leq \bar{c}_\rho c \int_t^{t+\delta} \|u^m(s)\|_V ds \|\nabla \pi\|_{(L^{6/5}(0))^{3}} \quad \text{p.s.},$$

où c est la constante d'immersion de Sobolev de $H^1(0)$ dans $L^6(0)$.

Par conséquent, la relation

$$\int_t^{t+\delta} \|u^m(s)\|_V ds \leq \delta^{1/2} \|u^m\|_{L^2(0,T;V^1)}$$

et l'estimation (4.35) entraînent que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c(\varepsilon)$ qui satisfait à (4.49). Le lemme est démontré. ■

3. - Espace produit de base.

Comme nous l'avons dit plus haut, pour la démonstration des théorèmes 4.1, 4.2, il est essentiel de définir un espace produit Y de sorte qu'on puisse construire une suite faiblement convergente de mesures de probabilité qui représentent les solutions approchées (pour les détails de la notion de convergence faible de mesures de probabilité, voir [GS]).

Dans le chapitre 3, nous avons défini l'espace

$$(L^\infty([0, T] \times \mathcal{O}) \text{ faible}^*)^{\#}$$

(voir (3.30)). Introduisons maintenant les espaces suivants.

Soit $\{v_k\}$ une base normalisée de l'espace de Hilbert $L^2(0, T, V^1)$. Désignons par

$$(L^2(0, T; V^1) \text{ faible})^*$$

l'espace composé par les éléments de $L^2(0, T; V^1)$ et muni de la norme

$$(4.50) \quad \|u\|_{(L^2(0, T; V^1) \text{ faible})^*} = \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |\langle u, v_k \rangle_{01}|^2 \right]^{1/2},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{01}$ désigne le produit scalaire de l'espace de Hilbert $L^2(0, T; V^1)$.

Soit $\{b_k\}$ une base normalisée de $C(0, T; V^1)$. Désignons par

$$(BV(0, T; V^1) \text{ faible}^*)^*$$

l'espace composé par les fonctions $\tilde{G}: [0, T] \rightarrow V^1$ à variation bornée telles que $\tilde{G}(0) = 0$ et muni de la norme

$$(4.51) \quad \|\tilde{G}\|_{(BV(0, T; V^1) \text{ faible}^*)^*} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left| \int_0^T \langle b_k(t), d\tilde{G}(t) \rangle_1 \right|,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ désigne le produit scalaire de l'espace de Hilbert V^1 et l'intégrale

$$\int_0^T \langle b_k(t), d\tilde{G}(t) \rangle_1$$

est définie comme intégrale de Stieltjes. La structure de l'espace de Hilbert V^1 est définie par le produit scalaire

$$(v, w)_{V^1} = \langle v, w \rangle_1 = ((-Pr\Delta)^{1/2} v | (-Pr\Delta)^{1/2} w),$$

ce qui est légitime car $\mathcal{O}$ est borné (voir les prop. 2.2, 2.3).

Pour ces espaces aussi on va démontrer des propriétés analogues à celles établies dans les lemmes 3.8, 3.9 et en tirer une conséquence utile.

LEMME 4.10. Soit $0 \leq c < \infty$. i) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\|u^n\|_{L^2(0, T; V^1)} \leq c,$$

alors u^n converge vers u dans $(L^2(0, T; V^1) \text{ faible})^*$ si et seulement si u^n converge vers u faiblement dans $L^2(0, T; V^1)$. ii) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\|u^n\|_{L^2(0, T; V^1)} \leq c$$

et si $\{u^n\}$ est une suite de Cauchy dans la métrique de

$$(L^2(0, T; V^1) \text{ faible})^*,$$

alors il existe la limite u :

$$u^n \rightarrow u \text{ dans } (L^2(0, T; V^1) \text{ faible})^*$$

et on a

$$\|u\|_{L^1(0, T; V^1)} \leq c.$$

iii) L'ensemble

$$\{u: \|u\|_{L^2(0, T; V^1)} \leq c\}$$

est compact dans $(L^2(0, T; V^1) \text{ faible})^*$. Les propriétés i), ii), iii) avec le changement évident d'espaces sont vérifiées même pour les espaces $(L^\infty([0, T] \times \mathcal{O}) \text{ faible}^*)^*$ et $(BV(0, T; V^1) \text{ faible}^*)^*$. $\square$

Nous précisons que la condition pour laquelle un ensemble E est borné dans $BV(0, T; V^1)$ s'exprime par la relation

$$\text{Var}_{V^1}(u; 0, T) \leq c \quad \forall u \in E \quad (c < \infty).$$

DÉMONSTRATION. Comme le résultat se démontre pour tous les espaces de la même manière, nous considérons seulement le cas de l'espace $(L^2(0, T; V^1) \text{ faible})^*$.

Les propriétés i), ii) se démontrent d'une manière analogue aux lemmes 3.8, 3.9 et les modifications nécessaires pour cela sont faciles. Il ne nous reste donc qu'à prouver la propriété iii). Posons

$$\Gamma = \{u: \|u\|_{L^2(0,T;V^1)} \leq c\}.$$

La propriété iii) résulte immédiatement du fait que de toute suite $\{u^n\}$ contenue dans Γ on peut extraire une sous-suite faiblement convergente. En effet, grâce aux propriétés i), ii), cette convergence faible implique la convergence dans $(L^2(0,T;V^1)\text{faible})^*$ et sa limite u vérifie la relation

$$\|u\|_{L^2(0,T;V^1)} \leq c,$$

donc $u \in \Gamma$, ce qui démontre la propriété iii). ■

Définissons maintenant les espaces produits $Y_{(1)}, Y_{(2)}$:

$$(4.52) \quad Y_{(1)} = Y^u \times Y^p \times Y^{\tilde{z}} \times Y^{\tilde{h}} \times Y^{\tilde{q}},$$

$$(4.53) \quad Y_{(2)} = Y^u \times Y^p \times Y^{\tilde{z}} \times Y^{\tilde{h}} \times Y^{\tilde{q}},$$

munis de la tribu borélienne $\mathcal{B}(Y_{(1)})$, $\mathcal{B}(Y_{(2)})$ respectivement, où

$$(4.54) \quad \begin{cases} Y^u = (L^2(0,T;V^1)\text{faible})^* \cap L^2(0,T;V^0), \\ Y^p = (L^\infty([0,T] \times O)\text{faible})^* \cap C(0,T; (W_{6/5}^1(O))'), \\ Y^{\tilde{z}} = C(0,T;V^{-1}), \\ Y^{\tilde{h}} = C(0,T;V^0) \cap (BV(0,T;V^1)\text{faible})^*, \\ Y^{\tilde{q}} = L^1(0,T;L^1(V^0;V^0)) \end{cases}$$

(et $(W_{6/5}^1(O))'$ désigne l'espace dual de $W_{6/5}^1(O)$).

Pour l'espace dual $(W_{6/5}^1(O))'$ de $W_{6/5}^1(O)$ et l'espace dual $V^{-1} = (V^1)'$ de V^1 , qui figurent dans la définition de Y^p et celle de $Y^{\tilde{z}}$, convenons, s'il est nécessaire, qu'ils soient munis d'une métrique du type (3.29) etc... définie par rapport à une base normalisée de $W_{6/5}^1(O)$ ou de V^1 . Même s'ils sont munis de cette

structure topologique au lieu de la structure usuelle, toutes les bonnes propriétés nécessaires pour les raisonnements ultérieurs seront garanties grâce au fait que $\rho(t,x)$ est uniformément borné, ce qu'on peut vérifier facilement en rappelant les raisonnements des lemmes 3.8, 3.9, 4.10.

Pour les espaces produits qu'on vient d'introduire, on a le

LEMME 4.11. Soit $\{\tilde{P}^m\}$ une suite de mesures de probabilité définie sur $Y_{(1)}$ ($i = 1, 2$) qui converge faiblement vers une mesure de probabilité $\tilde{P}$ (c'est-à-dire, une suite telle que, pour toute fonction $\varphi: Y_{(1)} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée, on ait

$$\int_{Y_{(1)}} \varphi(y) \tilde{P}^m(dy) \rightarrow \int_{Y_{(1)}} \varphi(y) \tilde{P}(dy).$$

Alors il existe un espace de probabilité $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ et des variables aléatoire η, η^m ($m = 1, 2, \dots$) telles que, si on définit $\mathbb{P}'^\eta$ et $\mathbb{P}'^{\eta^m}$ par la relation

$$\mathbb{P}'^\eta(A) = \mathbb{P}'(\{\omega' \in \Omega' : \eta(\omega') \in A\}) \quad \forall A \in \mathcal{B}(Y_{(1)})$$

et par la relation analogue pour $\mathbb{P}'^{\eta^m}$, on ait

$$(4.55) \quad \tilde{P} = \mathbb{P}'^\eta, \quad \tilde{P}^m = \mathbb{P}'^{\eta^m} \quad \text{en loi sur } (Y_{(1)}, \mathcal{B}(Y_{(1)})),$$

$$(4.56) \quad \eta^m(\omega') \rightarrow \eta(\omega') \quad \text{dans } Y_{(1)} \quad \text{pour } m \rightarrow \infty \quad \mathbb{P}'\text{-p.s.}\square$$

DÉMONSTRATION. Comme on le voit aisément, les espaces $Y_{(1)}, Y_{(2)}$ sont séparables. Par suite, le lemme résulte immédiatement du théorème de Skorokhod (voir par exemple [IW], chap.1, Th.2.7).

COROLLAIRE. Pour $m \rightarrow \infty$ et pour $\mathbb{P}'$ -presque tout $\omega' \in \Omega'$, on a, dans le cas où il s'agit de $Y_{(1)}$,

$$(4.57) \quad \begin{cases} P_u \eta^m(\omega') \rightarrow P_u \eta(\omega') & \text{dans } Y^u, \\ P_\rho \eta^m(\omega') \rightarrow P_\rho \eta(\omega') & \text{dans } Y^\rho, \\ P_{\tilde{H}} \eta^m(\omega') \rightarrow P_{\tilde{H}} \eta(\omega') & \text{dans } Y^{\tilde{H}}, \\ P_{\tilde{Q}} \eta^m(\omega') \rightarrow P_{\tilde{Q}} \eta(\omega') & \text{dans } Y^{\tilde{Q}}, \end{cases}$$

et, dans le cas où il s'agit de $Y_{(2)}$, on a, outre (4.57),

$$(4.58) \quad \begin{cases} P_\zeta \eta^m(\omega') \rightarrow P_\zeta \eta(\omega') & \text{dans } Y^\zeta, \\ P_{\tilde{G}} \eta^m(\omega') \rightarrow P_{\tilde{G}} \eta(\omega') & \text{dans } Y^{\tilde{G}}, \end{cases}$$

où P_u etc... désignent les projections d'un élément de $Y_{(1)}$ ($i = 1, 2$) sur Y^u etc... □

DÉMONSTRATION. Le corollaire résulte immédiatement du lemme 4.11. ■

Le lemme suivant donne une autre propriété importante de ces espaces produits.

LEMME 4.12. Soit $\Phi(y)$ une fonction continue définie sur $Y_{(1)}$ ($i = 1, 2$). S'il existe un nombre $p > 1$ tel que

$$(4.59) \quad \sup_m \int_{Y_{(1)}} |\Phi(y)|^p \tilde{P}^m(dy) < \infty,$$

alors on a

$$(4.60) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{Y_{(1)}} \Phi(y) \tilde{P}^m(dy) = \int_{Y_{(1)}} \Phi(y) \tilde{P}(dy) \quad (i = 1, 2). \quad \square$$

DÉMONSTRATION. Voir le lemme 2.7 de [V2], chap.1. ■

Pour $t \in]0, T]$, définissons

$$\|u\|_{[0,t]} \|(L^2(0,t;V^1)\text{faible})^* = \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |\langle u|_{[0,t]}, v_k|_{[0,t]} \rangle_{01}|^2 \right]^{1/2},$$

$$\|\rho\|_{[0,t] \times \alpha} \|(L^\infty([0,t] \times \mathcal{O})\text{faible})^* = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |\langle \rho|_{[0,t] \times \alpha}, \sigma_k|_{[0,t] \times \alpha} \rangle|,$$

$$\|\tilde{G}\|_{[0,t]} \|(BV(0,t;V^1)\text{faible})^* = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left| \int_0^t \langle b_k(s), d\tilde{G}(s) \rangle_1 \right|,$$

où v_k, σ_k, b_k sont les fonctions des mêmes bases utilisées dans les définitions (4.50), (3.30), (4.51). Bien que

$$\{v_k|_{[0,t]}\}, \{\sigma_k|_{[0,t] \times \alpha}\}, \{b_k|_{[0,t]}\}$$

ne soient plus des bases normalisées, l'ensemble de leurs combinaisons linéaires est dense dans $L^2(0,t;V^1)$, $L^1([0,t] \times \mathcal{O})$, $C(0,t;V^1)$ respectivement et on a évidemment

$$\|v_k|_{[0,t]}\|_{L^2(0,t;V^1)} \leq \|v_k\|_{L^2(0,T;V^1)} = 1,$$

$$\|\sigma_k|_{[0,t] \times \alpha}\|_{L^1([0,t] \times \mathcal{O})} \leq \|\sigma_k\|_{L^1([0,T] \times \mathcal{O})} = 1,$$

$$\|b_k|_{[0,t]}\|_{C(0,t;V^1)} \leq \|b_k\|_{C(0,T;V^1)} = 1.$$

Définissons alors

$$(4.61) \quad Y_{(1)t} = Y_t^u \times Y_t^\rho \times Y_t^{\tilde{H}} \times Y_t^{\tilde{Q}},$$

$$(4.62) \quad Y_{(2)t} = Y_t^u \times Y_t^\rho \times Y_t^\zeta \times Y_t^{\tilde{G}} \times Y_t^{\tilde{H}} \times Y_t^{\tilde{Q}},$$

où Y_t^u etc... sont définis de la même manière que dans (4.54) en y substituant t à T (c'est-à-dire,

$$Y_t^u = (L^2(0,t;V^1)\text{faible})^* \cap L^2(0,t;V^0) \text{ etc...}).$$

On voit sans peine que $\mathcal{F}_t$ peut être définie comme la sous-tribu de $\mathcal{F} = \mathcal{B}(Y_{(1)})$ engendrée par la topologie de $Y_{(1)t}$ ($i = 1, 2$), ou encore

$$(4.63) \quad \mathcal{F}_t = \{A \in \mathcal{F} : \exists A' \in \mathcal{B}(Y_{(1)t}) : A = \{y \in Y_{(1)} : y|_{[0,t]} \in A'\}\},$$

où

$$y|_{[0,t]} = (u|_{[0,t]}, \rho|_{[0,t] \times Q}, \tilde{H}|_{[0,t]}, \tilde{Q}|_{[0,t]})$$

s'il s'agit de $Y_{(1)}$, ou bien

$$y|_{[0,t]} = (u|_{[0,t]}, \rho|_{[0,t] \times Q}, \zeta|_{[0,t]}, \tilde{G}|_{[0,t]}, \tilde{H}|_{[0,t]}, \tilde{Q}|_{[0,t]})$$

s'il s'agit de $Y_{(2)}$.

4. - Démonstration du théorème 4.1.

Pour démontrer le théorème 4.1, nous construisons d'abord une suite convergente de mesures de probabilité définies sur $Y_{(1)}$.

Soit (u^m, ρ^m) la solution approchée, H^m le processus stochastique défini par (4.22), $\langle H^m \rangle'$ un processus stochastique à valeurs dans $\mathcal{L}(V_m; V_m)$ tel que

$$\langle H^m \rangle'(t) = \int_0^t \langle H^m \rangle'(s) ds \quad (0 \leq t \leq T) \quad \text{p.s.}$$

(dont l'existence est garantie par (4.3), (4.22)). Posons

$$(4.64) \quad y^m(\omega) = (u^m(\omega), \rho^m(\omega), H^m(\omega), \langle H^m \rangle'(\omega)).$$

En vertu du théorème 2.6, $y^m(\cdot)$ est une variable aléatoire dans $Y_{(1)}$. Nous définissons les mesures de probabilité $\mathbb{P}_{(1)}^{y^m}$ sur $(Y_{(1)}, \mathcal{B}(Y_{(1)}))$ par la relation

$$(4.65) \quad \mathbb{P}_{(1)}^{y^m}(A) = \mathbb{P}(\{\omega: y^m(\omega) \in A\}) \quad \forall A \in \mathcal{B}(Y_{(1)}).$$

On a alors le

LEMME 4.13. *Supposons que les hypothèses (4.1)-(4.5) sont vérifiées. Alors il existe une sous-suite $\{\mathbb{P}_{(1)}^{y^{m'}}\}$ de $\{\mathbb{P}_{(1)}^{y^m}\}$ qui converge faiblement, c'est-à-dire qu'il existe une mesure de*

probabilité $\mathbb{P}_{(1)}^y$ définie sur $(Y_{(1)}, \mathcal{B}(Y_{(1)}))$ et telle que, pour toute fonction $\varphi: Y_{(1)} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée, on ait

$$(4.66) \quad \int_{Y_{(1)}} \varphi(y) \mathbb{P}_{(1)}^{y^{m'}}(dy) \rightarrow \int_{Y_{(1)}} \varphi(y) \mathbb{P}_{(1)}^y(dy) \quad \text{pour } m' \rightarrow \infty.$$

DÉMONSTRATION. D'après le critère de Prokhorov (voir par exemple [GS] chap.6, §1, Th.1), il existe une telle sous-suite $\{\mathbb{P}_{(1)}^{y^{m'}}\}$, si (et seulement si) pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K(\varepsilon)$ de $Y_{(1)}$ tel que

$$\mathbb{P}_{(1)}^{y^m}(K(\varepsilon)) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

On déduit en effet de (4.35)-(4.36) que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c_1(\varepsilon)$ indépendante de m et telle que, si on pose

$$\begin{aligned} \tilde{K}^u(c_1(\varepsilon)) = \{u: & \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{V^0}^2 + \|u\|_{L^2(0,T;V^1)}^2 \\ & + \sup_{0 < \delta \leq T} \delta^{-1/2} \int_0^{T-\delta} \|u(t+\delta) - u(t)\|_{V^0}^2 dt \leq c_1\}, \end{aligned}$$

on ait

$$\mathbb{P}(\{\omega: u^m(\omega) \in \tilde{K}^u(c_1(\varepsilon))\}) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

ou, par (4.65),

$$\mathbb{P}_{(1)}^{y^m}(K^u(c_1(\varepsilon))) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

où

$$K^u(c_1(\varepsilon)) = \{y: P_u y \in \tilde{K}^u(c_1(\varepsilon))\}$$

(et P_u est comme dans (4.57)). En vertu du lemme 4.10, $\tilde{K}^u(c_1(\varepsilon))$ est relativement compact dans $(L^2(0,T;V^1)\text{faible})^*$. En outre, sa définition nous permet d'en déduire qu'il est relativement compact même dans $L^2(0,T;V^0)$. Donc, il est relativement compact dans Y^u .

D'autre part, d'après le théorème 2.6 et le lemme 4.9, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une constante $c_2(\varepsilon)$ indépendante de m et telle que, si on pose

$$\tilde{K}^P(c_2(\varepsilon)) = \{\rho: \underline{c}_\rho \leq \rho(t, x) \leq \bar{c}_\rho \text{ dans } [0, T] \times O,$$

$$\forall \pi \in W_{6/5}^1(O) \ S^*(\rho, \pi, \delta) \leq c_2(\varepsilon) \|\pi\|_{W_{6/5}^1(O)}\},$$

$$S^*(\rho, \pi, \delta) = \sup \{ \delta^{-1/2} |(\rho(t+\delta) - \rho(t))(\pi)| : 0 \leq t \leq T-\delta, 0 < \delta \leq T \},$$

on ait

$$P(\{\omega: \rho^m(\omega) \in \tilde{K}^P(c_2(\varepsilon))\}) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

et donc

$$P_{(1)}^{y^m}(K^P(c_2(\varepsilon))) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

avec

$$K^P(c_2(\varepsilon)) = \{y: P_\rho y \in \tilde{K}^P(c_2(\varepsilon))\}.$$

En vertu du lemme 4.10 et du théorème d'Ascoli-Arzelà, on voit que $\tilde{K}^P(c_2(\varepsilon))$ est relativement compact dans Y^P .

En ce qui concerne H^m et $\langle H^m \rangle'$, par leur construction, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un compact $\tilde{K}^0(\varepsilon)$ dans $Y^{\tilde{H}} \times Y^{\tilde{Q}}$ tel que

$$P(\{\omega: (H^m(\omega), \langle H^m \rangle'(\omega)) \in \tilde{K}^0(\varepsilon)\}) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

ou encore

$$P_{(1)}^{y^m}(K^0(\varepsilon)) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

avec

$$K^0(\varepsilon) = \{y: (P_{\tilde{H}} y, P_{\tilde{Q}} y) \in \tilde{K}^0(\varepsilon)\}.$$

Il s'ensuit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble relativement compact $K(\varepsilon)$ dans $Y_{(1)}$:

$$K(\varepsilon) = \tilde{K}^u(c_1(\varepsilon/3)) \times \tilde{K}^P(c_2(\varepsilon/3)) \times \tilde{K}^0(\varepsilon/3) =$$

$$= K^u(c_1(\varepsilon/3)) \cap K^P(c_2(\varepsilon/3)) \cap K^0(\varepsilon/3),$$

qui vérifie la relation

$$P_{(1)}^{y^m}(K(\varepsilon)) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

ce qui démontre le lemme. ■

Nous sommes maintenant en mesure d'achever la démonstration du théorème 4.1.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.1. Nous posons

$$(4.67) \quad \tilde{\Omega} = Y_{(1)}, \quad \tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{B}(Y_{(1)}), \quad \tilde{P} = P_{(1)}^y,$$

où $P_{(1)}^y$ est la mesure de probabilité limite de la sous-suite convergente construite dans le lemme 4.13. Pour simplifier la notation, nous notons encore m (au lieu de m') l'indice de la sous-suite convergente. Avec cette convention, nous posons

$$(4.68) \quad \tilde{P}^m = P_{(1)}^{y^m}.$$

Comme $\tilde{\Omega}$ est un espace produit, il est clair que la projection canonique de $\tilde{\Omega}$ sur chacun des espaces facteurs $Y^u, Y^P, Y^{\tilde{H}}, Y^{\tilde{Q}}$ est une variable aléatoire. Donc, si on pose

$$(4.69) \quad u = P_u y, \quad \rho = P_\rho y, \quad \tilde{H} = P_{\tilde{H}} y, \quad \tilde{Q} = P_{\tilde{Q}} y \quad (y \in \tilde{\Omega} = Y_{(1)}),$$

la démonstration du théorème consistera à montrer que la base stochastique $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in [0, t]}, \tilde{P})$ définie par (4.67) et par la relation (4.63) relative à $Y_{(1)}$ et les variables aléatoires $u, \rho, \tilde{H}, \tilde{Q}$ données dans (4.69) vérifient les conditions (4.9)-(4.14).

Pour démontrer la première relation de (4.10), on rappelle le lemme 4.11 et son corollaire, selon lesquels, pour $\tilde{P}'$ -presque tout $\omega' \in \tilde{\Omega}'$, on a

$$P_u \eta^m(\omega') \rightarrow P_u \eta(\omega') \text{ dans } (L^2(0, T; V^1) \text{ faible})^*.$$

Or, le corollaire du lemme 4.5 implique que, pour $\mathbb{P}'$ -presque tout ω' , il existe une constante $c(\omega')$ et une sous-suite $\{P_u \eta^{m'}(\omega')\} \subset \{P_u \eta^m(\omega')\}$ telles que

$$\|P_u \eta^{m'}(\omega')\|_{L^2(0, T; V^1)} \leq c(\omega') \quad \forall m'.$$

Par suite, en appliquant le lemme 4.10 à $\{P_u \eta^{m'}(\omega')\}$, on a

$$\|P_u \eta(\omega')\|_{L^2(0, T; V^1)} \leq c(\omega') < \infty.$$

Donc, par la première relation de (4.55), on a

$$\|P_u y\|_{L^2(0, T; V^1)} < \infty \quad \tilde{\mathbb{P}}\text{-p.s.}$$

La première relation de (4.10) est vérifiée.

En ce qui concerne ρ , on a, d'après le lemme 2.1,

$$(4.70) \quad \rho^m \in L^\infty([0, T] \times \mathcal{O})^+ \quad \mathbb{P}\text{-p.s.},$$

où $L^\infty([0, T] \times \mathcal{O})^+$ est l'ensemble défini par (3.32). Donc, d'après le lemme 4.11, on a

$$P_\rho \eta^m(\omega') \in L^\infty([0, T] \times \mathcal{O})^+ \quad \mathbb{P}'\text{-p.s.}$$

Cette relation, jointe à (4.57) et au lemme 3.9, entraîne que

$$P_\rho \eta(\omega') \in L^\infty([0, T] \times \mathcal{O})^+ \quad \mathbb{P}'\text{-p.s.},$$

ou encore

$$(4.71) \quad \rho = P_\rho y \in L^\infty([0, T] \times \mathcal{O})^+ \quad \tilde{\mathbb{P}}\text{-p.s.},$$

c'est-à-dire que la deuxième relation de (4.10) est vérifiée.

Pour démontrer (4.11), on remarque que, si $\varphi = \varphi(h)$ est une fonction réelle définie sur $C(0, T; V^0)$ continue par rapport à $h \in C(0, T; V^0)$ et bornée, alors la fonction composée $y \mapsto \varphi(P_H y)$ est continue par rapport à $y \in \tilde{\Omega}$. Donc, on déduit de (4.66) (voir aussi (4.67), (4.68)) qu'on a

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \varphi(P_H y) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}^m} \varphi(P_H y).$$

Mais, si on rappelle la construction de $P_H y$ par rapport à $\tilde{\mathbb{P}}^m$, on a

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}^m} \varphi(P_H y) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}^m} \varphi(H^m) = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \varphi(H),$$

d'où (4.11).

La relation (4.14) résulte du lemme 4.11 et de son corollaire. En effet, puisque $\eta^m(\omega')$ est $\mathbb{P}'$ -presque sûrement un élément de $Y_{(1)}$ qui représente une solution approchée, il est clair que, pour $\mathbb{P}'$ -presque tout ω' , on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} P_\rho \eta^m(\omega'; t, x) [\partial_t \psi(t, x) + P_u \eta^m(\omega'; t, x) \cdot \nabla \psi(t, x)] dx dt = \\ = - \int_{\mathcal{O}} \rho_0(x) \psi(0, x) dx, \end{aligned}$$

où ψ est comme dans (4.14). Les relations (4.57) et le lemme 3.8 nous permettent de passer à la limite pour $m \rightarrow \infty$ dans cette égalité. Mais, si l'égalité limite avec $P_u \eta(\omega')$, $P_\rho \eta(\omega')$ est $\mathbb{P}'$ -presque sûrement vraie, alors, en vertu de (4.55), l'égalité est $\tilde{\mathbb{P}}$ -presque sûrement vraie même avec $u = P_u y$, $\rho = P_\rho y$, c'est-à-dire, (4.14) est vérifiée.

Pour démontrer (4.12), on rappelle la construction de $\tilde{\mathcal{F}}_t$ (voir (4.61), (4.63)). Il en résulte immédiatement que $\tilde{H}(t)$ est mesurable par rapport à $\tilde{\mathcal{F}}_t$. Comme H^m est une martingale, si $\psi_r(\cdot)$ est une fonction bornée et continue par rapport à $y|_{[0, r]} \in Y_{(1)r}$, on a

$$(4.72) \quad \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{\mathbb{P}}^m(dy) \psi_r(y) [(\tilde{H}(t)|\phi) - (\tilde{H}(r)|\phi)] = 0$$

pour tout $\phi \in V^0$ et $0 \leq r \leq t \leq T$ (pour les notations $\tilde{\mathbb{P}}^m(\cdot)$, $\tilde{H}$,

voir (4.65), (4.68), (4.69)). D'autre part, on a pour tout m

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{P}^m(dy) \|\tilde{H}(t)\|_{V^0}^2 &= \mathbb{E}_P \|\tilde{H}^m(t)\|_{V^0}^2 \leq \mathbb{E}_P \text{Tr} \langle H \rangle (T) \leq \\ &\leq (\mathbb{E}_P \|Q\|_{L^2(0,T; \mathcal{L}^1(V^0; V^0))}^2)^{1/2} < \infty \end{aligned}$$

(voir (4.2)). Comme ψ_r est bornée, en vertu du lemme 4.12, on peut passer à la limite dans la relation (4.72), de sorte qu'on a

$$\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{P}(dy) \psi_r(y) [(\tilde{H}(t)|\vartheta) - (\tilde{H}(r)|\vartheta)] = 0,$$

d'où la condition (4.12).

Il ne reste donc qu'à vérifier la condition (4.13). On commence par considérer le cas où ϑ appartient à $\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$. ϑ appartient alors à V_{m_0} avec un certain m_0 , et donc, comme dans (4.37), la solution approchée (u^m, ρ^m) avec $m \geq m_0$ satisfait à l'égalité

$$\begin{aligned} (\rho^m(t)u^m(t)|\vartheta) &= \\ &= (\rho_0^m u_0^m|\vartheta) + \int_0^t (\rho^m(s)(u^m(s) \cdot \nabla)\vartheta|u^m(s))ds - \int_0^t (\nabla u^m(s)|\nabla\vartheta)ds \\ &+ \int_0^t (\rho^m(s)f^m(s)|\vartheta)ds + \int_0^t \langle \rho^m(s)\vartheta, dG^m(s) \rangle + \int_0^t \langle \rho^m(s)\vartheta, dH^m(s) \rangle \end{aligned}$$

P-p.s.

avec $G^m \equiv 0$. Bien que l'intégrale relative à dG^m soit identiquement nulle, nous la laissons figurer dans cette égalité, car on se servira de l'égalité avec l'intégrale relative à dG^m pour la démonstration du théorème 4.2.

Comme

$$\int_0^t \langle \rho^m(s)\vartheta, dH^m(s) \rangle$$

est une intégrale stochastique par rapport à une martingale, en

appliquant la formule d'Ito à $\varphi((\rho^m(t)u^m(t)|\vartheta))$ avec $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$,

on a

$$\begin{aligned} \varphi((\rho^m(t)u^m(t)|\vartheta)) - \varphi((\rho_0^m u_0^m|\vartheta)) &= \\ &= \int_0^t \varphi'((\rho^m(s)u^m(s)|\vartheta)) [(\rho^m(s)(u^m(s) \cdot \nabla)\vartheta|u^m(s)) \\ &\quad - (\nabla u^m(s)|\nabla\vartheta) + (\rho^m(s)f^m(s)|\vartheta)]ds \\ &+ \int_0^t \langle \varphi'((\rho^m(s)u^m(s)|\vartheta))\rho^m(s)\vartheta, dG^m(s) \rangle \\ &+ \int_0^t \langle \varphi'((\rho^m(s)u^m(s)|\vartheta))\rho^m(s)\vartheta, dH^m(s) \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \langle \varphi''((\rho^m(s)u^m(s)|\vartheta)) (Pr\rho^m(s)\vartheta \otimes Pr\rho^m(s)\vartheta), d\langle H^m \rangle(s) \rangle \end{aligned}$$

P-p.s..

Or, comme

$$\int_0^t \langle \varphi'((\rho^m(s)u^m(s)|\vartheta))\rho^m(s)\vartheta, dH^m(s) \rangle$$

est une intégrale stochastique par rapport à une martingale, elle

est elle aussi une martingale. Donc, pour $0 \leq r \leq t \leq T$, on a

$$\begin{aligned} (4.73) \quad \mathbb{E}_P [\varphi((\rho^m(t)u^m(t)|\vartheta)) - \varphi((\rho^m(r)u^m(r)|\vartheta))] \\ - N_{\varphi}^{\vartheta, m}(t) + N_{\varphi}^{\vartheta, m}(r) - \Phi^m(r, t) | \mathcal{F}_r = 0, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} N_{\varphi}^{\vartheta, m}(t) &= \\ &= \int_0^t \varphi'((\rho^m(s)u^m(s)|\vartheta)) [(\rho^m(s)(u^m(s) \cdot \nabla)\vartheta|u^m(s)) \\ &\quad - (\nabla u^m(s)|\nabla\vartheta) + (\rho^m(s)f(s)|\vartheta)]ds \\ &+ \int_0^t \langle \varphi'((\rho^m(s)u^m(s)|\vartheta))\rho^m(s)\vartheta, dG^m(s) \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \langle \varphi''((\rho^m(s)u^m(s)|\vartheta)) (Pr\rho^m(s)\vartheta \otimes Pr\rho^m(s)\vartheta), d\langle H^m \rangle(s) \rangle, \end{aligned}$$

$$\Phi^m(r, t) = \int_r^t \psi'_r((\rho^m(s)u^m(s)|\vartheta))(\rho^m(s)(f^m(s) - f(s)|\vartheta))ds.$$

Considérons maintenant une fonction $\psi_r: \tilde{\Omega} = Y_{(1)} \rightarrow C^1(0, T; \mathbb{R})$ bornée, mesurable par rapport à $\mathcal{F}_r$ et telle que $\psi_r(y; t) = 0 \forall t \in]0, r[\cup \{T\} \forall y \in \tilde{\Omega}$ comme dans (4.13). On voit aisément que la fonction composée $\psi_r \circ y^m$ (où y^m est définie par (4.64)) est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_r$. Par suite, on déduit de (4.73) que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_r^T \psi'_r(t) [\varphi((\rho^m(t)u^m(t)|\vartheta)) - (N_{\varphi}^{\vartheta, m}(t) - N_{\varphi}^{\vartheta, m}(r)) - \Phi^m(r, t)] dt \right] = \\ (4.74) \quad = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \varphi((\rho^m(r)u^m(r)|\vartheta)) \int_r^T \psi'_r(t) dt. \end{aligned}$$

Mais, si on rappelle les expressions originelles de $N_{\varphi}^{\vartheta, m}(t)$ et de $\Phi^m(r, t)$ et le fait que $\psi_r(T) = 0$, on voit que

$$\begin{aligned} \int_r^T \psi'_r(t) (N_{\varphi}^{\vartheta, m}(t) - N_{\varphi}^{\vartheta, m}(r)) dt = \\ = - \int_r^T \psi_r(t) \varphi'((\rho^m(t)u^m(t)|\vartheta)) [(\rho^m(t)(u^m(t) \cdot \nabla) \vartheta | u^m(t)) - (\nabla u^m(t) | \nabla \vartheta) + (\rho^m(t)f(t)|\vartheta)] dt \\ - \int_r^T \langle \psi_r(t) \varphi'((\rho^m(t)u^m(t)|\vartheta)) \rho^m(t) \vartheta, dG^m(t) \rangle \\ - \frac{1}{2} \int_r^T \langle \psi_r(t) \varphi''((\rho^m(t)u^m(t)|\vartheta)) (Pr \rho^m(t) \vartheta \otimes Pr \rho^m(t) \vartheta), d\langle H^m \rangle(t) \rangle, \\ \int_r^T \psi'_r(t) \Phi^m(r, t) dt = \\ = - \int_r^T \psi_r(t) \varphi'((\rho^m(t)u^m(t)|\vartheta)) (\rho^m(t)(f^m(t) - f(t)) | \vartheta) dt. \end{aligned}$$

On remarque qu'on a en outre

$$\begin{aligned} \varphi((\rho^m(r)u^m(r)|\vartheta)) \int_r^T \psi'_r(t) dt = - \varphi((\rho^m(r)u^m(r)|\vartheta)) \psi_r(r) = \\ = \begin{cases} = - \varphi((\rho_0^m u_0^m | \vartheta)) \psi_r(0) & \text{si } r = 0, \\ = 0 = - \varphi((\rho_0^m u_0^m | \vartheta)) \psi_r(0) & \text{si } r \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Comme, dans le cas présent, l'intégrale relative à dG^m s'annule identiquement, nous pouvons, en vertu des définitions (4.65), (4.68), (4.69), transformer l'égalité (4.74) en une égalité d'espérances mathématiques par rapport à l'espace de probabilité $(\tilde{\Omega}, \mathcal{F}, \tilde{\mathbb{P}})$. Donc, compte tenu encore des égalités que nous venons d'établir, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}^m} \left[\int_0^T \psi'_r(t) \varphi((\rho(t)u(t)|\vartheta)) dt + \int_0^T \psi_r(t) \varphi'((\rho(t)u(t)|\vartheta)) [(\rho(t)(u(t) \cdot \nabla) \vartheta | u(t)) - (\nabla u(t) | \nabla \vartheta) + (\rho(t)f(t)|\vartheta)] dt \right. \\ (4.75) \quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^T \langle \psi_r(t) \varphi''((\rho(t)u(t)|\vartheta)) (Pr \rho(t) \vartheta \otimes Pr \rho(t) \vartheta), Q(t) \rangle dt + \int_0^T \psi_r(t) \varphi'((\rho(t)u(t)|\vartheta)) (\rho(t)(f^m(t) - f(t)) | \vartheta) dt \right] = \\ = - \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}^m} \psi_r(0) \varphi((\rho_0^m u_0^m | \vartheta)), \end{aligned}$$

où on a utilisé la condition

$$\psi'_r(t) = \psi_r(t) = 0 \quad \forall t \in]0, r[$$

pour prolonger l'intégrale $\int_r^T \cdot dt$ à l'intégrale $\int_0^T \cdot dt$.

Or, grâce à (4.70), l'égalité (4.75) reste vraie même si

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}^m} = \int_{\tilde{\Omega}} \cdot \tilde{\mathbb{P}}^m(dy)$$

est remplacé par

$$\int_{\tilde{\Omega}^{\rho}} \cdot \tilde{\mathbb{P}}^m(dy),$$

où

$$\tilde{\Omega}^P = Y_{(1)P} = \{y \in \tilde{\Omega} = Y_{(1)} : P_\rho y \in L^\infty([0, T] \times O)^+\}$$

(pour la définition de $L^\infty([0, T] \times O)^+$ voir (3.32)), c'est-à-dire

$$(4.75)\text{bis} \quad \int_{\tilde{\Omega}^P} \tilde{P}^m(dy) [\text{comme dans (4.75)}] = -E_{\tilde{P}^m} \psi_r(0) \varphi((\rho_0^m u_0^m | \vartheta)).$$

Donc, si on rappelle la relation (4.71), le passage à la limite dans (4.75)bis constituera la preuve de (4.13). Mais les relations (4.52), (4.63), (4.67), qui définissent $\tilde{\Omega}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_t$, entraînent que pour démontrer (4.13), il suffit de prouver l'égalité entre les deux espérances mathématiques de (4.13) pour toute fonction ψ_r continue par rapport à $y \in Y_{(1)} = \tilde{\Omega}$ et jouissant de la propriété indiquée ci-dessus (dans l'explication de (4.74)). Nous allons donc démontrer dans la suite le passage à la limite pour $m \rightarrow \infty$ dans (4.75)bis en supposant que $\psi_r(\cdot) = \psi_r(y; \cdot)$ est continue par rapport à $y \in Y_{(1)} = \tilde{\Omega}$.

On remarque d'abord que

$$(4.76) \quad \begin{aligned} & \left| \int_{\tilde{\Omega}^P} \tilde{P}^m(dy) \int_0^T \psi_r(t) \varphi'((\rho(t)u(t) | \vartheta)) (\rho(t)(f^m(t) - f(t) | \vartheta)) dt \right| \leq \\ & \leq c \int_{\tilde{\Omega}^P} \tilde{P}^m(dy) \int_0^T \bar{c}_\rho \|f^m(t) - f(t)\|_{(L^2(O))^{3|\vartheta|}} \|\vartheta\|_V dt \rightarrow 0 \\ & \text{pour } m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

où

$$c = (\sup_{y, t} |\psi_r(y; t)|) (\sup_s |\varphi'(s)|) \equiv (\sup |\psi_r|) (\sup |\varphi'|).$$

Or, le lemme 4.10 implique que les fonctions

$$\Phi_1(y) = \int_0^T \psi_r'(t) \varphi((\rho(t)u(t) | \vartheta)) dt,$$

$$\Phi_2(y) = \int_0^T \langle \psi_r(t) \varphi''((\rho(t)u(t) | \vartheta)) (Pr\rho(t)\vartheta \otimes Pr\rho(t)\vartheta), \tilde{Q}(t) \rangle dt$$

sont continues par rapport à $y \in Y_{(1)P}$. En outre, grâce au lemme 4.5 et au fait que ψ_r , ψ_r' , φ , φ'' sont uniformément bornées, les fonctions $\Phi_1(y)$, $\Phi_2(y)$ qu'on vient de définir vérifient la condition (4.59). Il s'ensuit, d'après le lemme 4.12, que

$$(4.77) \quad \begin{aligned} & \int_{\tilde{\Omega}^P} \tilde{P}^m(dy) \int_0^T \psi_r'(t) \varphi((\rho(t)u(t) | \vartheta)) dt \rightarrow \\ & \rightarrow \int_{\tilde{\Omega}^P} \tilde{P}(dy) \int_0^T \psi_r'(t) \varphi((\rho(t)u(t) | \vartheta)) dt \quad \text{pour } m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

$$(4.78) \quad \begin{aligned} & \int_{\tilde{\Omega}^P} \tilde{P}^m(dy) \int_0^T \langle \psi_r(t) \varphi''((\rho(t)u(t) | \vartheta)) (Pr\rho(t)\vartheta \otimes Pr\rho(t)\vartheta), \tilde{Q}(t) \rangle dt \rightarrow \\ & \rightarrow \int_{\tilde{\Omega}^P} \tilde{P}(dy) \int_0^T \langle \psi_r(t) \varphi''((\rho(t)u(t) | \vartheta)) (Pr\rho(t)\vartheta \otimes Pr\rho(t)\vartheta), \tilde{Q}(t) \rangle dt \\ & \text{pour } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

De manière analogue la fonction

$$\Phi_3(y) = \int_0^T \psi_r(t) \varphi'((\rho(t)u(t) | \vartheta)) (\rho(t)f(t) | \vartheta) dt$$

est continue par rapport à $y \in Y_{(1)P}$ et vérifie la condition (4.59). On considère en outre la fonction

$$\Phi_4(y) = \int_0^T \psi_r(t) \varphi'((\rho(t)u(t) | \vartheta)) (\rho(t)(u(t) \cdot \nabla) \vartheta | u(t)) dt.$$

Si on décompose la différence $\Phi_4(y) - \Phi_4(\bar{y})$ en quatre intégrales I_1 , I_2 , I_3 , I_4 , comme on l'a fait dans le raisonnement qui suit immédiatement (3.28), et si on les calcule de la même manière pour $y \rightarrow \bar{y}$ en tenant compte du lemme 4.10 et du fait que $P_\rho y \in L^\infty([0, T] \times O)^+ \forall y \in Y_{(1)P}$, alors on constate que $\Phi_4(y)$ est continue par rapport à $y \in Y_{(1)P}$. En outre, en vertu du lemme 4.5, $\Phi_4(y)$ vérifie la condition (4.59). Il s'ensuit, encore d'après le lemme 4.12, que

$$\int_{\tilde{\Omega}^{\rho}} (\Phi_3(y) + \Phi_4(y)) \tilde{\mathbb{P}}^m(dy) \rightarrow \int_{\tilde{\Omega}^{\rho}} (\Phi_3(y) + \Phi_4(y)) \tilde{\mathbb{P}}(dy) \text{ pour } m \rightarrow \infty.$$

On considère maintenant l'ensemble

$$\tilde{\Omega}^{\rho k} = \{y \in Y_{(1)\rho} = \tilde{\Omega}^{\rho} : \|P_u y\|_{L^2(0,T;V^1)} \leq k\}.$$

Comme on le vérifie facilement en vertu du lemme 4.10, $\tilde{\Omega}^{\rho k}$ est fermé dans $\tilde{\Omega} = Y_{(1)}$ et la fonction

$$\Phi_5(y) = \int_0^T \psi_r(t) \varphi'((\rho(t)u(t)|\vartheta)) (\nabla u(t)|\nabla \vartheta) dt$$

est continue et bornée sur $\tilde{\Omega}^{\rho k}$. On a en particulier

$$|\Phi_5(y)| \leq ck \quad \forall y \in \tilde{\Omega}^{\rho k}$$

avec $c = (\sup |\psi_r|)(\sup |\varphi'|) \|\vartheta\|_V$. Nous pouvons donc construire une fonction $\Phi_5^k(y)$ définie sur $\tilde{\Omega}^{\rho} = Y_{(1)\rho}$, continue par rapport à $y \in \tilde{\Omega}^{\rho}$ et bornée de sorte que

$$|\Phi_5(y)| \leq ck \quad \forall y \in \tilde{\Omega}^{\rho},$$

et donc, en vertu de la convergence faible de $\tilde{\mathbb{P}}^m$ vers $\tilde{\mathbb{P}}$ (voir (4.66), (4.68)), on obtient

$$\int_{\tilde{\Omega}^{\rho}} \Phi_5^k(y) \tilde{\mathbb{P}}^m(dy) \rightarrow \int_{\tilde{\Omega}^{\rho}} \Phi_5^k(y) \tilde{\mathbb{P}}(dy) \text{ pour } m \rightarrow \infty.$$

D'autre part, le lemme 4.5 implique que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\tilde{\Omega}^{\rho}} (\Phi_5^k(y) - \Phi_5(y)) \tilde{\mathbb{P}}^m(dy) \right| &\leq \int_{\tilde{\Omega}^{\rho} \setminus \tilde{\Omega}^{\rho k}} 2c \|P_u y\|_{L^2(0,T;V^1)} \tilde{\mathbb{P}}^m(dy) \leq \\ &\leq c' k^{-3}, \end{aligned}$$

où, comme on voit aisément, la constante c' ne dépend pas de m . Comme le lemme 4.5 et le lemme 4.10 impliquent en outre l'estimation

$$\tilde{\mathbb{P}}(\{y : \|P_u y\|_{L^2(0,T;V^1)} > k\}) \leq Ck^{-4}$$

avec la même constante C du lemme 4.5, on a

$$\left| \int_{\tilde{\Omega}^{\rho}} (\Phi_5^k(y) - \Phi_5(y)) \tilde{\mathbb{P}}(dy) \right| \leq c' k^{-3}.$$

Il en résulte que

$$\int_{\tilde{\Omega}^{\rho}} \Phi_5(y) \tilde{\mathbb{P}}^m(dy) \rightarrow \int_{\tilde{\Omega}^{\rho}} \Phi_5(y) \tilde{\mathbb{P}}(dy) \text{ pour } m \rightarrow \infty.$$

Donc, compte tenu de la convergence pour $\Phi_3 + \Phi_4$ démontrée ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} (4.79) \quad &\int_{\tilde{\Omega}^{\rho}} \tilde{\mathbb{P}}^m(dy) \int_0^T \psi_r(t) \varphi'((\rho(t)u(t)|\vartheta)) A(y;t) dt \rightarrow \\ &\rightarrow \int_{\tilde{\Omega}^{\rho}} \tilde{\mathbb{P}}(dy) \int_0^T \psi_r(t) \varphi'((\rho(t)u(t)|\vartheta)) A(y;t) dt \text{ pour } m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

où

$$A(y;t) = (\rho(t)(u(t) \cdot \nabla) \vartheta | u(t)) - (\nabla u(t) | \nabla \vartheta) + (\rho(t)f(t) | \vartheta).$$

Nous avons déjà démontré que (4.12) est vérifiée, c'est-à-dire que $\tilde{H}$ est une martingale par rapport à $\tilde{\mathbb{P}}$. Donc il existe le processus croissant $\langle \tilde{H} \rangle$ associé à $\tilde{H}$. Nous allons prouver que

$$(4.80) \quad \langle \tilde{H} \rangle(t) = \int_0^t \tilde{Q}(s) ds \quad \tilde{\mathbb{P}}\text{-p.s.}$$

Pour cela, on considère l'égalité

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \tilde{\psi}_r(y^m(\omega)) [\tilde{\varphi}((H^m(t)|\xi)) - \tilde{\varphi}((H^m(r)|\xi))] \\ - \frac{1}{2} \int_r^t \langle \varphi''((H^m(s)|\xi)) \xi \otimes \xi, \langle H^m \rangle'(s) \rangle ds = 0 \\ \forall \xi \in V^0, \end{aligned}$$

qui, grâce à la formule d'Ito appliquée à $\tilde{\varphi}((H^m(t)|\xi))$ et à la propriété de martingale du processus H^m , est vérifiée pour toute fonction bornée $\tilde{\varphi}$ de classe C^3 et pour toute fonction $\tilde{\psi}_r \circ y^m$

mesurable par rapport à $\mathcal{F}_r$. En transformant cette égalité en une égalité entre deux intégrales relatives à $\mathbb{P}_{(1)}^{y^m}(dy) = \tilde{\mathbb{P}}^m(dy)$ (voir (4.65)) et en tenant compte de (4.70), on a

$$(4.81) \quad \int_{\tilde{\Omega}^\rho} \tilde{\mathbb{P}}^m(dy) \tilde{\psi}_r(y) [\tilde{\varphi}(\tilde{H}(t)|\xi) - \tilde{\varphi}(\tilde{H}(r)|\xi)] = \\ = \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Omega}^\rho} \tilde{\mathbb{P}}^m(dy) \tilde{\psi}_r(y) \int_r^t \langle \tilde{\varphi}''(\tilde{H}(s)|\xi) \rangle \xi \otimes \xi, \tilde{Q}(s) ds \quad \forall \xi \in V^0$$

pour toute fonction $\tilde{\psi}_r$ bornée et continue par rapport à $y|_{[0,t]} \in Y_{(1)t}$ et pour toute fonction $\tilde{\varphi} \in C^3(\mathbb{R};\mathbb{R}) \cap W_\infty^3(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Il est clair que l'expression

$$\tilde{\psi}_r(y) [\tilde{\varphi}(\tilde{H}(t)|\xi) - \tilde{\varphi}(\tilde{H}(r)|\xi)]$$

est bornée et continue par rapport à $y \in Y_{(1)}$ et que l'expression

$$\tilde{\psi}_r(y) \int_r^t \langle \tilde{\varphi}''(\tilde{H}(s)|\xi) \rangle \xi \otimes \xi, \tilde{Q}(s) ds$$

est continue par rapport à $y \in Y_{(1)}$. En outre, grâce à la condition (4.2), on a

$$\int_{\tilde{\Omega}^\rho} \tilde{\mathbb{P}}^m(dy) |\tilde{\psi}_r(y) \int_r^t \langle \tilde{\varphi}''(\tilde{H}(s)|\xi) \rangle \xi \otimes \xi, \tilde{Q}(s) ds|^2 \leq \\ \leq c \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \|Q\|_{L^1(0,T;\mathcal{L}^1(V^0,V^0))}^2 = c' < \infty.$$

Par conséquent, en vertu du lemme 4.12, on peut passer à la limite pour $m \rightarrow \infty$ dans (4.81), c'est-à-dire que l'égalité (4.81) reste vraie même si $\tilde{\mathbb{P}}^m(dy)$ est remplacé par $\tilde{\mathbb{P}}(dy)$, ce qui, compte tenu de (4.71), signifie que le processus

$$\int_0^t \tilde{Q}(s) ds,$$

considéré par rapport à $\tilde{\mathbb{P}}$, est le processus croissant associé à la martingale $\tilde{H}(t)$. (4.80) est donc vérifiée.

La relation (4.80) étant vérifiée, on peut exprimer (4.78) sous la forme suivante

$$(4.82) \quad \int_{\tilde{\Omega}^\rho} \tilde{\mathbb{P}}^m(dy) \int_0^T \langle \psi_r(t) \varphi''((\rho(t)u(t)|\vartheta)) (Pr\rho(t)\vartheta \otimes Pr\rho(t)\vartheta), \tilde{Q}(t) \rangle dt \rightarrow \\ \rightarrow \int_{\tilde{\Omega}^\rho} \tilde{\mathbb{P}}(dy) \int_0^T \langle \psi_r(t) \varphi''((\rho(t)u(t)|\vartheta)) (Pr\rho(t)\vartheta \otimes Pr\rho(t)\vartheta), d\langle \tilde{H} \rangle(t) \rangle \\ \text{pour } m \rightarrow \infty.$$

On déduit de (4.20), (4.23) et de la continuité de φ que

$$\varphi((\rho_0^m u_0^m | \vartheta)) \rightarrow \varphi((\rho_0 u_0 | \vartheta)).$$

Donc les relations (4.76), (4.77), (4.79), (4.82), démontrées ci-dessus, nous permettent de passer à la limite dans (4.75)bis, ce qui prouve l'égalité de (4.13) pour tout $\vartheta \in \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$.

Pour démontrer l'égalité de (4.13) non seulement pour $\vartheta \in \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$, mais pour tout $\vartheta \in V^1$, on rappelle d'abord que $\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$ est dense dans V^1 . En particulier, si $\vartheta \in V^1$, alors

$$\vartheta_k = Pr_k \vartheta \rightarrow \vartheta \text{ dans } V^1 \text{ pour } k \rightarrow \infty$$

et

$$\|\vartheta_k\|_{V^1} \leq \|\vartheta\|_{V^1}.$$

Nous désignons par $N^*(\vartheta, \tilde{\omega}) = N^*(\vartheta, y)$ l'expression qui se trouve sous l'espérance mathématique $\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}$ du premier membre de l'égalité de (4.13). Alors on voit facilement que

$$(4.83) \quad N^*(\vartheta_k, y) \rightarrow N^*(\vartheta, y) \text{ pour } k \rightarrow \infty \quad \forall y \in Y_{(1)\rho} = \tilde{\Omega}^\rho.$$

On pose encore

$$\Phi(y) = c(\psi_r, \varphi) [T + \|\vartheta\|_{V^1} \{ \bar{c}_\rho \|u\|_{L^2(0,T;V^1)}^2 + \|u\|_{L^1(0,T;V^1)} \}]$$

$$+ \bar{c}_\rho \|f\|_{L^1(0,T;(L^2(O))^3)} \\ + (\bar{c}_\rho)^2 \| \ll \tilde{H} \gg' \|_{L^1(0,T;\mathcal{L}(V^0;V^0))} \| \vartheta \|_{V^0} \},$$

où

$$c(\psi_r, \varphi) = (\sup |\psi_r| + \sup |\psi_r'|) (\sup |\varphi| + \sup |\varphi'| + \sup |\varphi''|).$$

L'expression

$$\| \ll \tilde{H} \gg' \|_{L^1(0,T;\mathcal{L}(V^0;V^0))}$$

est bien définie grâce à (4.80). De (4.80) on déduit également l'estimation

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \| \ll \tilde{H} \gg' \|_{L^1(0,T;\mathcal{L}(V^0;V^0))}^2 &= \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \| \tilde{Q} \|_{L^1(0,T;\mathcal{L}(V^0;V^0))}^2 \leq \\ &\leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \| Q \|_{L^1(0,T;\mathcal{L}^1(V^0;V^0))}^2 \end{aligned}$$

(voir aussi (4.2)). Alors, on voit aisément que la fonction $\Phi(y)$ vérifie

$$(4.84) \quad |N^*(\vartheta_k, y)| \leq \Phi(y) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

pour $\tilde{\mathbb{P}}$ -presque tout $y \in Y_{(1)} = \tilde{\Omega}$.

On considère en outre la fonction $\Phi_1(y)$ définie par

$$\Phi_1(y) = c(\psi_r, \varphi) \| \vartheta \|_{V^1} \{ \bar{c}_\rho \| u \|_{L^2(0,T;V^1)}^2 + \| u \|_{L^2(0,T;V^1)} \}.$$

On remarque que, en vertu du lemme 4.10, la fonction $\Phi_1(y)$ est semi-continue inférieurement (et donc mesurable) par rapport à $y \in \tilde{\Omega}^0$. En outre, le lemme 4.5 et la définition de $\tilde{\mathbb{P}}^m$ entraînent que

$$\sup_m \int_{\tilde{\Omega}_1} \Phi_1(y) \tilde{\mathbb{P}}^m(dy) < \infty.$$

Donc, pour tout n , on a

$$\int_{\tilde{\Omega}} (n \wedge \Phi_1(y)) \tilde{\mathbb{P}}(dy) \leq \liminf_m \int_{\tilde{\Omega}} (n \wedge \Phi_1(y)) \tilde{\mathbb{P}}^m(dy) \leq \sup_m \int_{\tilde{\Omega}_1} \Phi_1(y) \tilde{\mathbb{P}}^m(dy) < \infty,$$

d'où

$$\int_{\tilde{\Omega}_1} \Phi_1(y) \tilde{\mathbb{P}}(dy) < \infty.$$

D'autre part, il est clair qu'on a

$$0 \leq \int_{\tilde{\Omega}} (\Phi(y) - \Phi_1(y)) \tilde{\mathbb{P}}(dy) < \infty.$$

Par conséquent, on a

$$(4.85) \quad \int_{\tilde{\Omega}} \Phi(y) \tilde{\mathbb{P}}(dy) < \infty.$$

A l'aide du théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on déduit de (4.83)-(4.85) que

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} N^*(\vartheta, \tilde{\omega}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} N^*(\vartheta_k, \tilde{\omega}).$$

D'autre part, il est évident que

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \psi_r(0) \varphi((\rho_0 u_0 | \vartheta)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \psi_r(0) \varphi((\rho_0 u_0 | \vartheta_k)).$$

Comme l'égalité de (4.13) est déjà démontrée pour tous les ϑ_k , ces dernières relations pour la limite pour $k \rightarrow \infty$ impliquent que l'égalité de (4.13) est vraie pour tout $\vartheta \in V^1$, ce qui achève la démonstration du théorème 4.1. ■

5. - Démonstration du théorème 4.2.

La démonstration du théorème 4.2 suit, dans ses grandes lignes, celle du théorème 4.1. On soulignera donc dans la suite des modifications et de nouvelles considérations en relation avec la démonstration du théorème 4.1.

Soient u^m, ρ^m les solutions approchées, G^m, H^m les processus stochastiques définis par (4.21), (4.22), $\langle H^m \rangle'$ un processus stochastique à valeurs dans $V_m \otimes V_m$ tel que

$$\langle H^m \rangle(t) = \int_0^t \langle H^m \rangle'(s) ds.$$

On pose

$$(4.86) \quad y^m(\omega) = (u^m(\omega), \rho^m(\omega), Pr_m \rho^m(\omega) u^m(\omega), G^m(\omega), H^m(\omega), \langle H^m \rangle'(\omega))$$

et on définit la mesure de probabilité $\mathbb{P}_{(2)}^{y^m}$ sur $(Y_{(2)}, \mathcal{B}(Y_{(2)}))$ par la relation

$$(4.87) \quad \mathbb{P}_{(2)}^{y^m}(A) = \mathbb{P}(\{\omega: y^m(\omega) \in A\}) \quad \forall A \in \mathcal{B}(Y_{(2)}).$$

On a alors le

LEMME 4.14. Supposons que les hypothèses (4.1)-(4.8) sont vérifiées. Alors il existe une sous-suite $\{\mathbb{P}_{(2)}^{y^{m'}}\}$ de $\{\mathbb{P}_{(2)}^{y^m}\}$ qui converge faiblement, c'est-à-dire qu'il existe une mesure de probabilité $\mathbb{P}_{(2)}^y$ définie sur $(Y_{(2)}, \mathcal{B}(Y_{(2)}))$ et telle que, pour toute fonction $\varphi: Y_{(2)} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée, on ait

$$(4.88) \quad \int_{Y_{(2)}} \varphi(y) \mathbb{P}_{(2)}^{y^{m'}}(dy) \rightarrow \int_{Y_{(2)}} \varphi(y) \mathbb{P}_{(2)}^y(dy) \quad \text{pour } m' \rightarrow \infty.$$

DÉMONSTRATION. Comme dans la démonstration du lemme 4.13, il suffit de démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K(\varepsilon)$ de $Y_{(2)}$ tel que

$$\mathbb{P}_{(2)}^{y^m}(K(\varepsilon)) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Dans la démonstration du lemme 4.13, nous avons déjà vu qu'il existe un ensemble compact $\tilde{K}^u(c_1(\varepsilon/4)) \times \tilde{K}^p(c_2(\varepsilon/4))$ de $Y^u \times Y^p$ tel

que

$$\mathbb{P}(\{\omega: (u^m(\omega), \rho^m(\omega)) \in \tilde{K}^u(c_1(\varepsilon/4)) \times \tilde{K}^p(c_2(\varepsilon/4))\}) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, par la définition de $G^m, H^m, \langle H^m \rangle'$, il est clair qu'il existe un compact $\tilde{K}^0(\varepsilon/4)$ de $Y^{\tilde{G}} \times Y^{\tilde{H}} \times Y^{\tilde{0}}$ tel que

$$\mathbb{P}(\{\omega: (G^m(\omega), H^m(\omega), \langle H^m \rangle'(\omega)) \in \tilde{K}^0(\varepsilon/4)\}) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{4}.$$

En outre, il résulte du lemme 4.7 et du théorème d'Ascoli-Arzelà qu'il existe un compact $\tilde{K}^\zeta(\varepsilon/4)$ de Y^ζ tel que

$$\mathbb{P}(\{\omega: Pr_m \rho^m(\omega) u^m(\omega) \in \tilde{K}^\zeta(\varepsilon/4)\}) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Il s'ensuit que l'ensemble

$$K(\varepsilon) = \tilde{K}^u(c_1(\varepsilon/4)) \times \tilde{K}^p(c_2(\varepsilon/4)) \times \tilde{K}^\zeta(\varepsilon/4) \times \tilde{K}^0(\varepsilon/4)$$

est relativement compact dans $Y_{(2)}$ et on a

$$\mathbb{P}_{(2)}^{y^m}(K(\varepsilon)) = \mathbb{P}(\{\omega: y^m(\omega) \in K(\varepsilon)\}) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

Nous sommes maintenant en mesure d'achever la démonstration du théorème 4.2.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.2. Comme dans la démonstration du théorème 4.1, pour simplifier la notation, nous notons encore m (au lieu de m') l'indice de la sous-suite convergente obtenue dans le lemme 4.14. On pose alors

$$(4.89) \quad \tilde{\Omega} = Y_{(2)}, \quad \tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{B}(Y_{(2)}), \quad \tilde{\mathbb{P}} = \mathbb{P}_{(2)}^y,$$

$$(4.90) \quad \tilde{\mathbb{P}}^m = \mathbb{P}_{(2)}^{y^m},$$

$$(4.91) \quad u = P_u y, \quad \rho = P_\rho y, \quad \zeta = P_\zeta y, \quad \tilde{G} = P_{\tilde{G}} y, \quad \tilde{H} = P_{\tilde{H}} y, \quad \tilde{Q} = P_{\tilde{Q}} y,$$

$$(y \in \tilde{\Omega} = Y_{(2)}).$$

Les éléments $u, \rho, \zeta, \tilde{G}, \tilde{H}, \tilde{Q}$ ainsi définis sont évidemment des variables aléatoires. La démonstration du théorème 4.2 consistera à montrer que la base stochastique $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in [0, T]}, \tilde{\mathbb{P}})$ définie par (4.89) et par la relation (4.63) relative à $Y_{(2)}$ et les variables aléatoires $u, \rho, \zeta, \tilde{G}, \tilde{H}, \tilde{Q}$ données dans (4.91) vérifient les relations (4.10), (4.11)bis, (4.12), (4.14), (4.15), (4.16), (4.17).

La démonstration des conditions (4.10), (4.12), (4.14) faite dans la preuve du théorème 4.1 reste, comme on voit immédiatement, valable même pour le théorème 4.2 sans autre modification que celles purement formelles dues à la substitution de l'espace produit $Y_{(2)}$ à $Y_{(1)}$.

On prouve la condition (4.11)bis sous les hypothèses du théorème 4.2 d'une manière tout à fait analogue à la preuve de la condition (4.11) dans la démonstration du théorème 4.1. Il suffit en effet d'y considérer la fonction $\varphi(P_{\tilde{G}} y + P_{\tilde{H}} y)$ au lieu de $\varphi(P_{\tilde{H}} y)$.

D'autre part, une idée analogue à l'idée qui nous a conduits à vérifier la première relation de (4.10) nous permet de prouver la condition (4.15). En effet, pour $\mathbb{P}'$ -presque tout ω' , on a

$$P_{\tilde{G}} \eta^m(\omega') \rightarrow P_{\tilde{G}} \eta(\omega') \quad \text{dans } (BV(0, T; V^1) \text{ faible}^*)^{\#}$$

(voir (4.58)) et il existe, comme on le vérifie facilement par la construction de G^m , une constante $c(\omega')$ telle qu'on ait

$$\text{Var}_{V^1}(P_{\tilde{G}} \eta^m(\omega'); 0, T) \leq c(\omega')$$

pour une sous-suite $\{P_{\tilde{G}} \eta^m(\omega')\}$. Grâce au lemme 4.10, on en déduit (4.15).

Quant à la première relation de (4.17), il nous convient de la démontrer dans la forme

$$(4.17)_1 \text{ bis} \quad \int_s^t (\rho(r)u(r) - \zeta(r)|\phi) dr = 0 \quad \forall [s, t] \subset [0, T] \quad \forall \phi \in V^1 \\ \tilde{\mathbb{P}}\text{-p.s.}$$

En effet, pour $\mathbb{P}'$ -presque tout ω' et pour tout m , on a

$$\int_s^t (P_{\rho} \eta^m(\omega'; r) P_u \eta^m(\omega'; r) - P_{\zeta} \eta^m(\omega'; r) |\phi) dr = 0.$$

Si on considère l'intégrale

$$\int_s^t \cdot dr = \int_0^T \chi_{[s, t]}(r) dr,$$

dans laquelle $\chi_{[s, t]}(\cdot)$ désigne la fonction caractéristique de l'intervalle $[s, t]$, les convergences montrées dans (4.57)-(4.58) et le lemme 3.8 nous permettent de passer à la limite, de sorte que, encore à l'aide de (4.55), on obtient (4.17)₁ bis.

La deuxième relation de (4.17) résulte du fait que, pour $\mathbb{P}'$ -presque tout ω' , on a

$$(P_{\tilde{G}} \eta^m(\omega'; 0) |\phi) = (\rho_0^m u_0^m |\phi),$$

et des convergences

$$P_{\tilde{G}} \eta^m(\omega'; \cdot) \rightarrow P_{\tilde{G}} \eta(\omega'; \cdot) \quad \text{dans } C(0, T; V^{-1}),$$

$$\rho_0^m u_0^m \rightarrow \rho_0 u_0 \quad \text{dans } (L^{6/5}(0))^3 \quad \text{et donc dans } V^{-1}$$

(voir (4.58), (4.20), (4.23)). La condition (4.17) est donc vérifiée.

Il ne reste donc qu'à démontrer la relation (4.16), que, grâce à la remarque 4.3, nous allons démontrer sous la forme de (4.18)-(4.19). Comme dans la démonstration de (4.13) illustrée dans le paragraphe précédent, on commence par le cas où $\vartheta \in \bigcup_{m=1}^{\infty}$. On peut donc supposer que $\vartheta \in V_{m_0}$. On suppose en outre que $m \geq m_0$.

Nous rappelons d'abord que, pour déduire l'égalité (4.73), nous n'avons pas utilisé la condition $G^m \equiv 0$, et que donc elle est valable même pour le cas présent, où G^m ne s'annule en général pas. Soit maintenant $\psi_r: \tilde{\Omega} = Y_{(2)} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et continue par rapport à $y|_{[0,r]} \in Y_{(2)r}$. Puisque la fonction composée $\psi_r \circ y^m$ de ψ_r avec la fonction y^m définie dans (4.86) est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_r$, on déduit de (4.73) que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}^m} \psi_r(y^m(\omega)) [\varphi((\rho^m(t)u^m(t)|\vartheta)) - \varphi((\rho^m(r)u^m(r)|\vartheta))] \\ - N_{\varphi}^{\vartheta, m}(t) + N_{\varphi}^{\vartheta, m}(r) - \Phi(r, t)] = 0. \end{aligned}$$

En rappelant que $(\rho^m(t)u^m(t)|\vartheta) = (Pr_m \rho^m(t)u^m(t)|\vartheta)$, on transforme cette égalité en une expression relative à l'espace de probabilité $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}^m)$ défini dans (4.89)-(4.91). On remarque en outre que, grâce à (4.70), on peut remplacer

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}^m} = \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{\mathbb{P}}^m(dy)$$

par

$$\int_{\tilde{\Omega}^{\rho}} \tilde{\mathbb{P}}^m(dy),$$

où

$$\tilde{\Omega}^{\rho} = Y_{(2)\rho} = \{y \in \tilde{\Omega} = Y_{(2)}; P_{\rho}y \in L^{\infty}([0, T] \times \mathcal{O})^*\}$$

(voir aussi (3.32)). On a donc

$$\begin{aligned} (4.92) \quad & \int_{\tilde{\Omega}^{\rho}} \tilde{\mathbb{P}}^m(dy) \psi_r(y) [\varphi((\zeta(t)|\vartheta)) - \varphi((\zeta(r)|\vartheta)) - \tilde{N}_{\varphi}^{\vartheta}(y; r, t)] = \\ & = \int_{\tilde{\Omega}^{\rho}} \tilde{\mathbb{P}}^m(dy) \psi_r(y) \int_r^t \varphi'((\zeta(s)|\vartheta)) (\rho(s)(f^m(s) - f(s))|\vartheta) ds, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{\varphi}^{\vartheta}(y; r, t) = & \int_r^t \varphi'((\zeta(s)|\vartheta)) [(\rho(s)(u(s) \cdot \nabla \vartheta | u(s)) - (\nabla u(s) | \nabla \vartheta) \\ & + (\rho(s)f(s)|\vartheta)) ds \\ & + \int_r^t \langle \varphi'((\zeta(s)|\vartheta)) \rho(s) \vartheta, d\tilde{G}(s) \rangle \\ & + \frac{1}{2} \int_r^t \langle \varphi''((\zeta(t)|\vartheta)) (Pr \rho(s) \vartheta \otimes Pr \rho(s) \vartheta), \tilde{Q}(s) \rangle ds. \end{aligned}$$

Nous remarquons d'abord que, en vertu de la continuité de la fonction $\psi_r(y) \varphi((P_{\zeta} y(t)|\vartheta)): \tilde{\Omega} = Y_{(2)} \rightarrow \mathbb{R}$ pour tout $t \in [0, T]$ fixé, on a

$$\begin{aligned} (4.93) \quad & \int_{\tilde{\Omega}^{\rho}} \tilde{\mathbb{P}}^m(dy) \psi_r(y) [\varphi((\zeta(t)|\vartheta)) - \varphi((\zeta(r)|\vartheta))] \rightarrow \\ & \rightarrow \int_{\tilde{\Omega}^{\rho}} \tilde{\mathbb{P}}(dy) \psi_r(y) [\varphi((\zeta(t)|\vartheta)) - \varphi((\zeta(r)|\vartheta))]. \end{aligned}$$

Pour étudier la convergence de

$$\int_{\tilde{\Omega}^{\rho}} \tilde{\mathbb{P}}^m(dy) \psi_r(y) \int_r^t \langle \varphi'((\zeta(s)|\vartheta)) \rho(s) \vartheta, d\tilde{G}(s) \rangle,$$

nous définissons

$$(4.94) \quad \left\{ \begin{aligned} a(m, \omega'; s) &= \psi_r(\eta^m(\omega')) \varphi'((P_{\zeta} \eta^m(\omega'; s)|\vartheta)) P_{\rho} \eta^m(\omega'; s) \\ &\quad - \psi_r(\eta(\omega')) \varphi'((P_{\zeta} \eta(\omega'; s)|\vartheta)) P_{\rho} \eta(\omega'; s), \\ b^1(m, \omega') &= \\ &= \int_r^t \langle \psi_r(\eta(\omega')) \varphi'((P_{\zeta} \eta(\omega'; s)|\vartheta)) P_{\rho} \eta(\omega'; s) \vartheta, dP_{\tilde{G}}^m(\omega'; s) \rangle, \end{aligned} \right.$$

$$\begin{cases} b^0(\omega') = \\ = \int_r^t \langle \psi_r(\eta(\omega')) \varphi'((P_{\zeta}\eta(\omega';s)|\vartheta)) P_{\rho}\eta(\omega';s)\vartheta, dP_{\zeta}\eta(\omega';s) \rangle \end{cases}$$

avec les variables aléatoires η^m , η définies dans (4.56)-(4.57) ($b^0(\omega')$ est bien défini, car nous avons déjà démontré (4.15)).

En vertu des hypothèses imposées sur φ et ψ_r , on a

$$\begin{aligned} & |\varphi'((P_{\zeta}\eta^m(\omega';s)|\vartheta)) - \varphi'((P_{\zeta}\eta(\omega';s)|\vartheta))| \leq \\ & \leq \sup |\varphi''| |(P_{\zeta}\eta^m(\omega';s) - P_{\zeta}\eta(\omega';s)|\vartheta)| \quad \mathbb{P}'\text{-p.s.}, \end{aligned}$$

et donc, grâce à (4.58),

$$\begin{aligned} \psi_r(\eta^m(\omega')) \varphi'((P_{\zeta}\eta^m(\omega';\cdot)|\vartheta)) & \rightarrow \psi_r(\eta(\omega')) \varphi'((P_{\zeta}\eta(\omega';\cdot)|\vartheta)) \\ & \text{dans } C(0,T;\mathbb{R}) \text{ pour } m \rightarrow \infty \quad \mathbb{P}'\text{-p.s.} \end{aligned}$$

Puisque, en outre, $P_{\rho}\eta^m(\omega')$ converge à $P_{\rho}\eta(\omega')$ dans $C(0,T;(W_{6/5}^1(0)))'$ $\mathbb{P}'$ -presque sûrement (voir (4.57)), on a

$$a(m,\omega';\cdot) \rightarrow 0 \text{ dans } C(0,T;(W_{6/5}^1(0)))' \quad \mathbb{P}'\text{-p.s.};$$

mais, vu que, pour tout $\xi \in V^1$, on a

$$\|\nabla(\vartheta \cdot \xi)\|_{L^{6/5}(0)} \leq c \|\vartheta\|_{V^1} \|\xi\|_{V^1},$$

il vient

$$a(m,\omega';\cdot)\vartheta \rightarrow 0 \text{ dans } C(0,T;V^{-1}) \quad \mathbb{P}'\text{-p.s.}.$$

D'autre part, il est évident que

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq s \leq T} \|a(m,\omega';s)\vartheta\|_{V^{-1}} & \leq 2(\sup |\psi_r|)(\sup |\varphi'|) \bar{c}_{\rho} \|\vartheta\|_{V^0} \equiv 2c_0 \\ & \mathbb{P}'\text{-p.s.} \quad \forall m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Donc, d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue,

on a

$$\int_{\Omega'} \mathbb{P}'(d\omega') \left(\sup_{r \leq s \leq t} \|a(m,\omega';s)\vartheta\|_{V^{-1}} \right)^2 \rightarrow 0 \text{ pour } m \rightarrow \infty.$$

Nous remarquons en outre que

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega'} \mathbb{P}'(d\omega') \int_r^t \langle a(m,\omega';s)\vartheta, dP_{\zeta}\eta^m(\omega';s) \rangle \right| \leq \\ & \leq \left(\int_{\Omega'} \mathbb{P}'(d\omega') \sup_{r \leq s \leq t} \|a(m,\omega';s)\vartheta\|_{V^{-1}}^2 \right)^{1/2} \times \\ & \quad \times \left(\int_{\Omega'} \mathbb{P}'(d\omega') \text{Var}_{V^1}(P_{\zeta}\eta^m(\omega');0,T) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

et que

$$\int_{\Omega'} \mathbb{P}'(d\omega') \text{Var}_{V^1}(P_{\zeta}\eta^m(\omega');0,T)^2 \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \text{Var}_{V^1}(G;0,T)^2.$$

Donc, en vertu de la condition (4.8), on a

$$(4.95) \quad \left| \int_{\Omega'} \mathbb{P}'(d\omega') \int_r^t \langle a(m,\omega';s)\vartheta, dP_{\zeta}\eta^m(\omega';s) \rangle \right| \rightarrow 0 \text{ pour } m \rightarrow \infty.$$

Pour démontrer la convergence de

$$\int_{\Omega'} (b^1(m,\omega') - b^0(\omega')) \mathbb{P}'(d\omega'),$$

on définit, pour $k > 0$, l'ensemble

$$\Gamma^k = \{\tilde{G} \in Y^{\tilde{G}} : \text{Var}_{V^1}(\tilde{G};0,T) \leq k\}$$

et les variables aléatoires

$$\tilde{\eta}_k^0(\omega') = 0 \quad \forall \omega' \in \Omega',$$

$$\tilde{\eta}_k^m(\omega') = \eta^m(\omega') \quad \text{si } P_{\zeta}\eta^m(\omega') \in \Gamma^k,$$

$$\tilde{\eta}_k^m(\omega') = \tilde{\eta}_k^{m-1}(\omega') \quad \text{autrement} \quad (m \geq 1).$$

D'après le lemme 4.10, la convergence de la suite $\{P_{\zeta}\eta^m(\omega')\}$ dans $(BV(0,T;V^1)\text{faible}^*)^{\#}$ implique celle de la suite modifiée

$\{P_{\zeta}\tilde{\eta}_k^m(\omega')\}$ de sorte qu'il existe $\tilde{G}_k^*(\omega') \in Y^{\tilde{G}}$ tel que

$$\int_0^T \langle c(t), dP_{\zeta}\tilde{\eta}_k^m(\omega';t) \rangle \rightarrow \int_0^T \langle c(t), d\tilde{G}_k^*(\omega';t) \rangle \text{ pour } m \rightarrow \infty$$

$$\forall c(\cdot) \in C(0,T;V^{-1}).$$

Comme pour $\mathbb{P}'$ -presque tout ω' on a

$$\psi_r(\eta(\omega'))\varphi'((P_{\zeta}\eta(\omega';\cdot)|\vartheta))P_{\rho}\eta(\omega';\cdot)\vartheta \in C(0,T;V^{-1}),$$

il vient

$$b_k^1(m, \omega') \rightarrow b_k^0(\omega') \quad \mathbb{P}'\text{-p.s.},$$

où $b_k^1(m, \omega')$ est défini par la même expression de $b^1(m, \omega')$ de (4.94), expression dans laquelle on remplace toutefois $dP_{\zeta}\eta^m(\omega';s)$ par $dP_{\zeta}\tilde{\eta}_k^m(\omega';s)$, tandis que $b_k^0(\omega')$ est défini par la substitution de $d\tilde{G}_k^*(\omega';s)$ à $dP_{\zeta}\eta(\omega';s)$ dans la définition de $b^0(\omega')$ de (4.94). D'autre part, on a

$$\begin{aligned} & \|\psi_r(\eta(\omega'))\varphi'((P_{\zeta}\eta(\omega';s)|\vartheta))P_{\rho}\eta(\omega';s)\vartheta\|_{V^{-1}} \leq \\ & \leq (\sup|\psi_r|)(\sup|\varphi'|)\bar{c}_{\rho}\|\vartheta\|_{V^0} \equiv c_0\|\vartheta\|_{V^0} \quad \mathbb{P}'\text{-p.s.}, \end{aligned}$$

et donc

$$|b_k^1(m, \omega')| \leq kc_0\|\vartheta\|_{V^0} \quad \mathbb{P}'\text{-p.s.}.$$

Par conséquent, d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\int_{\Omega'} b_k^1(m, \omega') \mathbb{P}'(d\omega') \rightarrow \int_{\Omega'} b_k^0(\omega') \mathbb{P}'(d\omega') \quad \text{pour } m \rightarrow \infty.$$

D'autre part, en vertu de la condition (4.8), il n'est pas difficile d'obtenir l'estimation

$$|\int_{\Omega'} (b^1(m, \omega') - b_k^1(m, \omega')) \mathbb{P}'(d\omega')| \leq 2c_0 \frac{1}{k} \mathbb{E}(\text{Var}_{V^1}(G; 0, T))^2.$$

En outre, si on rappelle le raisonnement de la démonstration de (4.15), il n'est pas difficile de déduire du lemme 4.10 que la fonction $\tilde{G}_k^*(\omega')$ est telle que la convergence

$$b_k^0(\omega') \rightarrow b^0(\omega') \quad \text{pour } k \rightarrow \infty \quad \mathbb{P}'\text{-p.s.}$$

soit vérifiée. Si on pose

$$\bar{\gamma}_k(\omega') = \lim_{m \rightarrow \infty} \inf_{\omega} \text{Var}_{V^1}(P_{\zeta}\eta_k^m(\omega'); 0, T),$$

alors $\bar{\gamma}_k(\omega')$ est croissant par rapport au paramètre k pour $\mathbb{P}'$ -presque $\omega' \in \Omega'$ et satisfait à la relation

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} \bar{\gamma}_k(\omega') \mathbb{P}'(d\omega') & \leq \liminf \int_{\Omega'} (\text{Var}_{V^1}(P_{\zeta}\eta_k^m(\omega'); 0, T)) \mathbb{P}'(d\omega') \\ & \leq (\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\text{Var}_{V^1}(G; 0, T))^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

D'autre part, si on rappelle la définition de $\tilde{G}_k^*(\omega')$, on a

$$\text{Var}_{V^1}(\tilde{G}_k^*(\omega'); 0, T) \leq \bar{\gamma}_k(\omega') \quad \mathbb{P}'\text{-p.s.}.$$

Par conséquent, la condition (4.8) implique que la fonction

$$\Gamma(\omega') = \sup_k \text{Var}_{V^1}(\tilde{G}_k^*(\omega'); 0, T)$$

est intégrable, c'est-à-dire que l'on a

$$\int_{\Omega'} \Gamma(\omega') \mathbb{P}'(d\omega') < \infty.$$

Et donc, on peut appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue à $|b_k^0(\omega')| \leq c_0\|\vartheta\|_{V^0}\Gamma(\omega')$, de sorte qu'on a

$$\int_{\Omega'} b_k^0(\omega') \mathbb{P}'(d\omega') \rightarrow \int_{\Omega'} b^0(\omega') \mathbb{P}'(d\omega') \quad \text{pour } k \rightarrow \infty.$$

Il s'ensuit qu'on a

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega'} b^1(m, \omega') \mathbb{P}'(d\omega') = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega'} b_k^0(\omega') \mathbb{P}'(d\omega') = \int_{\Omega'} b^0(\omega') \mathbb{P}'(d\omega'),$$

ou encore

$$(4.96) \quad \int_{\Omega'} (b^1(m, \omega') - b^0(\omega')) \mathbb{P}'(d\omega') \rightarrow 0 \quad \text{pour } m \rightarrow \infty.$$

Il résulte de (4.94)-(4.96) (voir aussi (4.55)) qu'on a

$$\int_{\tilde{\Omega}^0} \tilde{\mathbb{P}}^m(dy) \psi_r(y) \int_r^t \langle \varphi'((\zeta(s)|\vartheta)) \rho(s)\vartheta, d\tilde{G}(s) \rangle$$

(4.97)

$$- \int_{\tilde{\Omega}^0} \tilde{P}(dy) \psi_r(y) \int_r^t \langle \varphi'((\zeta(s)|\vartheta)) \rho(s) \vartheta, d\tilde{G}(s) \rangle \rightarrow 0$$

pour $m \rightarrow \infty$.

Nous allons maintenant voir que les convergences (4.76), (4.79), (4.82) démontrées dans le paragraphe précédent restent vraies même dans le cas présent. En effet, l'absence de la dérivée $\psi'_r(y; s)$ sous l'intégrale $\int_0^T \cdot dt$ (ou $\int_0^{\cdot} \cdot dt$, $d\langle \tilde{H} \rangle(t)$) dans les relations (4.76), (4.79), (4.82) nous permet d'en déduire qu'elles restent vraies même si on y remplace $\psi_r(y; s)$ par une fonction de la forme $\psi_r(y) \chi_{[r, t]}(s)$, où $\psi_r(y)$ est une fonction réelle définie sur $\tilde{\Omega} = Y_{(2)}$ et mesurable par rapport à $\tilde{\mathcal{F}}_r$ et $\chi_{[r, t]}(s)$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[r, t]$. En outre, la condition (4.17), que nous avons déjà démontrée, nous permet de substituer $\varphi'((\zeta(s)|\vartheta))$ et $\varphi''((\zeta(s)|\vartheta))$ à $\varphi'((\rho(s)u(s)|\vartheta))$ et à $\varphi''((\rho(s)u(s)|\vartheta))$ respectivement dans (4.76), (4.79), (4.82). Donc, les convergences (4.76), (4.76), (4.82) restent vraies même si on y substitue $\psi_r(y) \chi_{[r, t]}(s)$, $\varphi'((\zeta(s)|\vartheta))$, $\varphi''((\zeta(s)|\vartheta))$ à $\psi_r(y; s)$, $\varphi'((\rho(s)u(s)|\vartheta))$, $\varphi''((\rho(s)u(s)|\vartheta))$.

Ces convergences et les relations (4.93), (4.97) nous permettent de passer à la limite dans (4.92), de sorte qu'on a,

pour tout $\vartheta \in \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$,

$$(4.98) \quad \int_{\tilde{\Omega}^0} \tilde{P}(dy) \psi_r(y) [\varphi((\zeta(t)|\vartheta)) - \varphi((\zeta(r)|\vartheta)) - \tilde{N}_{\varphi}^{\vartheta}(y; r, t)] = 0.$$

En vertu de (4.71), on peut remplacer $\int_{\tilde{\Omega}^0} \tilde{P}(dy)$ par $\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{P}(dy) = \mathbb{E}_{\tilde{P}}$ dans (4.98).

Pour démontrer que l'égalité (4.98) est vraie pour tout

$\vartheta \in V^1$, on raisonne d'une manière analogue au passage de (4.13)

pour $\vartheta \in \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$ à (4.13) pour tout $\vartheta \in V^1$. Pour cela, on pose

$$\vartheta_k = Pr_k \vartheta,$$

$$c(\psi_r, \varphi) = (\sup |\psi_r|) (\sup |\varphi| + \sup |\varphi'| + \sup |\varphi''|),$$

et on considère les fonctions

$$\begin{aligned} \Phi_1(y) &= c(\psi_r, \varphi) \{ 2 + \|\vartheta\|_{V^1} [\bar{c}_{\rho} \|u\|_{L^2(0, T; V^1)}^2 + \|u\|_{L^2(0, T; V^1)} \\ &\quad + \bar{c}_{\rho} \|f\|_{L^1(0, T; (L^2(0))^3)} \\ &\quad + \bar{c}_{\rho} \|\langle \tilde{H} \rangle'\|_{L^1(0, T; \mathcal{L}^1(V^0; V^0))} \|\vartheta\|_{V^0} \}, \end{aligned}$$

$$\Phi_2(y) = c(\psi_r, \varphi) \bar{c}_{\rho} \|\vartheta\|_{V^0} \text{Var}_{V^1}(\tilde{G}; 0, T).$$

On voit immédiatement que

$$|\psi_r(y) [\varphi((\zeta(t)|\vartheta_k)) - \varphi((\zeta(r)|\vartheta_k)) - \tilde{N}_{\varphi}^{\vartheta_k}(y; r, t)]| \leq \Phi_1(y) + \Phi_2(y),$$

$$\forall \vartheta \in V^1, \forall k \in \mathbb{N}, \text{ pour } \tilde{P}\text{-presque tout } y \in Y_{(2)} = \tilde{\Omega}.$$

L'intégrabilité de $\Phi_1(y)$:

$$\int_{\tilde{\Omega}} \Phi_1(y) \tilde{P}(dy) < \infty$$

se démontre de la même manière que (4.85).

En ce qui concerne $\Phi_2(y)$, on considère la fonction $\gamma(y) = \text{Var}_{V^1}(\tilde{G}; 0, T)$. D'après le lemme 4.10, elle est semi-continue inférieurement par rapport à $y \in \tilde{\Omega}$. Il s'ensuit que

$$\int_{\tilde{\Omega}} (\gamma(y))^2 \tilde{P}(dy) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{\tilde{\Omega}} (\gamma(y))^2 \tilde{P}^m(dy),$$

et donc, en vertu de la condition (4.8), on a

$$(4.99) \quad \mathbb{E}_{\tilde{P}}(\text{Var}_{V^1}(\tilde{G}; 0, T))^2 \leq \mathbb{E}_{\tilde{P}}(\text{Var}_{V^1}(G; 0, T))^2 < \infty.$$

Par conséquent, on a

$$\int_{\tilde{\Omega}} \Phi_2(y) \tilde{\mathbb{P}}(dy) \leq c(\psi_r, \varphi) \bar{c}_\rho \|\vartheta\|_{V^0} (\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}(\text{Var}_{V^1}(G; 0, T))^2)^{1/2} < \infty.$$

Etant donné que

$$\psi_r(y) [\varphi((\zeta(t)|\vartheta_k)) - \varphi((\zeta(r)|\vartheta_k)) - \tilde{N}_\varphi^{\vartheta_k}(y; r, t)] \rightarrow$$

$$\rightarrow \psi_r(y) [\varphi((\zeta(t)|\vartheta)) - \varphi((\zeta(r)|\vartheta)) - \tilde{N}_\varphi^{\vartheta}(y; r, t)] \text{ pour } k \rightarrow \infty,$$

les estimations de Φ_1 et de Φ_2 obtenues ci-dessus nous permettent d'appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue à la suite des fonctions

$$\psi_r(y) [\varphi((\zeta(t)|\vartheta_k)) - \varphi((\zeta(r)|\vartheta_k)) - \tilde{N}_\varphi^{\vartheta_k}(y; r, t)].$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{\mathbb{P}}(dy) \psi_r(y) [\varphi((\zeta(t)|\vartheta)) - \varphi((\zeta(r)|\vartheta)) - \tilde{N}_\varphi^{\vartheta}(y; r, t)] &= \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{\mathbb{P}}(dy) \psi_r(y) [\varphi((\zeta(t)|\vartheta_k)) - \varphi((\zeta(r)|\vartheta_k)) - \tilde{N}_\varphi^{\vartheta_k}(y; r, t)], \end{aligned}$$

ce qui prouve la relation (4.98) pour tout $\vartheta \in V^1$.

En outre, la fonction $\tilde{N}_\varphi^{\vartheta}(t)$ définie dans (4.19) est $\tilde{\mathbb{P}}$ -presque sûrement égale à $\varphi((\zeta(t)|\vartheta)) - \varphi((\zeta(0)|\vartheta)) - \tilde{N}_\varphi^{\vartheta}(y; 0, t)$, et mesurable par rapport à $\tilde{\mathcal{F}}_t$, ce qui résulte immédiatement de la construction de $\tilde{N}_\varphi^{\vartheta}$. D'autre part, on a déjà démontré l'intégralibilité de $\tilde{N}_\varphi^{\vartheta}$ lors du passage de (4.98) pour $\vartheta \in \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$ à (4.98) pour $\vartheta \in V^1$. ψ_r étant arbitraire, ceci signifie que la condition (4.19) est vérifiée.

On démontre finalement la condition (4.18). On pose

$$\Phi^*(y) = 5(4 \sup_{0 \leq t \leq T} \|\zeta(t)\|_{V^{-1}}^2 + (\bar{c}_\rho)^2 \|u\|_{L^2(0, T; V^1)}^4)$$

$$+ \|u\|_{L^2(0, T; V^1)}^2 + (\bar{c}_\rho)^2 \|f\|_{L^1(0, T; (L^2(O))^3)}^2 \|\vartheta\|_{V^1}^2.$$

On a alors

$$(M^{\vartheta}(t))^2 \leq \Phi^*(y) + 5 \left| \int_0^t \langle \rho(s) \vartheta, d\tilde{G}(s) \rangle \right|^2 \quad \forall t \in [0, T] \quad \tilde{\mathbb{P}}\text{-p.s.}$$

En vertu du lemme 4.10, la fonction $\Phi^*(y)$ est semi-continue inférieurement par rapport à $y \in \tilde{\Omega}^P$. Donc, d'une manière analogue à la démonstration de (4.85), compte tenu du lemme 4.5 et de (4.71), on obtient

$$\int_{Y_{(2)}} \Phi^*(y) \tilde{\mathbb{P}}(dy) = \int_{\tilde{\Omega}^P} \Phi^*(y) \tilde{\mathbb{P}}(dy) < \infty.$$

D'autre part, on déduit de (4.99) que

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left| \int_0^t \langle \rho(s) \vartheta, d\tilde{G}(s) \rangle \right|^2 < \infty.$$

En outre, il est évident que $M^{\vartheta}(t)^2$ est mesurable par rapport à $\tilde{\mathcal{F}}$.

Il en résulte que (4.18) est vérifiée.

Donc, vu la remarque 4.3, le théorème est complètement démontré. ■

CHAPITRE 5

APPLICATION DE LA METHODE DEVELOPPEE DANS LE CHAPITRE PRECEDENT AUX EQUATIONS STOCHASTIQUES DU TYPE NAVIER-STOKES

1. - Hypothèses et résultats.

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier d'éventuelles applications de la méthode développée dans le chapitre précédent au problème de martingales pour les équations stochastiques du type Navier-Stokes. Il s'agit de trouver un processus stochastique $u(t)$ satisfaisant à une équation de la forme

$$du(t) + (A(t)u(t) + B(u(t)))dt = dG(t) + dH(t),$$

équation d'évolution dans un espace de Hilbert séparable, avec la condition initiale

$$u(0) = u_0,$$

où $A(t)$ est un opérateur linéaire, $B(\cdot)$ est un opérateur non linéaire, G est un processus stochastique à variation bornée, et H est une martingale (à valeurs dans un espace de Hilbert séparable). Les conditions sur les opérateurs $A(t)$, $B(\cdot)$ et sur les processus stochastiques G , H vont être précisées dans la suite. Les équations de Navier-Stokes stochastiques dans un domaine ouvert borné régulier O de $\mathbb{R}^n$ de dimension n quelconque sont des exemples d'équations de ce type.

Soient U , V , W trois espaces de Hilbert séparables tels que

$$(5.1) \quad \begin{cases} W \subset V \subset U, \text{ chaque espace étant dense dans le suivant} \\ \text{avec injection continue.} \end{cases}$$

On identifie l'espace U et son espace dual U' , de sorte qu'on a

$$(5.2) \quad W \subset V \subset U = U' \subset V' \subset W',$$

où V' et W' désignent l'espace dual de V et celui de W respectivement. De plus, on suppose que

$$(5.3) \quad \text{l'injection de } V \text{ dans } U \text{ est compacte.}$$

Il existe donc une base orthonormale $\{e_j\}$ de U telle que, pour tout j , il existe $\lambda_j > 0$ tel que

$$(e_j|v)_V = \lambda_j (e_j|v)_U \quad \forall v \in V, \\ \lambda_j \rightarrow \infty \text{ pour } j \rightarrow \infty.$$

On désigne par U_m le sous-espace engendré par $\{e_1, \dots, e_m\}$ et par Pr_m la projection orthogonale de U sur U_m . On suppose que

$$(5.4) \quad \begin{cases} \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m \text{ est contenu et dense dans } W, \\ \exists c > 0 : \|Pr_m w\|_W \leq c \|w\|_W \quad \forall w \in W, \forall m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Pour les processus stochastiques donnés G et H , on pose les hypothèses suivantes:

$$(5.5) \quad \begin{cases} (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P}) \text{ est une base stochastique sur la-} \\ \text{quelle des processus stochastiques } G \text{ et } H \text{ sont définis,} \end{cases}$$

$$(5.6) \quad \begin{cases} G \text{ est un processus stochastique adapté (par rapport} \\ \text{à } \mathcal{F}_t), \text{ continu à valeurs dans } U, \text{ à variation bornée et} \\ \text{tel que } G(0) = 0 \text{ p.s. et que} \\ \mathbb{E}(\text{Var}_U(G; 0, T))^4 < \infty, \end{cases}$$

$$(5.7) \quad \begin{cases} H \text{ est une martingale continue à valeurs dans } U \text{ telle} \\ \text{que } H(0) = 0 \text{ p.s. et que} \end{cases}$$

$$\left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} E \| \langle H \rangle (t) \|_{\otimes 1}^2 < \infty \quad (\| \cdot \|_{\otimes 1} = \| \cdot \|_{\mathcal{L}^1(U;U)}). \right.$$

En réalité, comme H est une martingale, $\| \langle H \rangle (t) \|_{\otimes 1}$ est croissante et égale à $Tr \langle H \rangle (t)$; on a donc

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} E \| \langle H \rangle (t) \|_{\otimes 1}^2 &= E \| \langle H \rangle (T) \|_{\otimes 1}^2 = \\ &= E (Tr \langle H \rangle (T))^2 = \sup_{0 \leq t \leq T} E (Tr \langle H \rangle (t))^2 < \infty \end{aligned}$$

$\| \cdot \|_{\mathcal{L}^1(U;U)}$ et Tr sont définis de la même manière que dans le cas où on considère V^0 à la place de U ; voir les explications à (4.2), (4.34)).

Pour les opérateurs $A = A(t)$ et B , on suppose que

$$(5.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(t) \in \mathcal{L}(V;V') \quad \forall t \in [0,T], \\ \exists c > 0 : \| A(t) \|_{\mathcal{L}(V;V')} \leq c \quad \forall t \in [0,T], \end{array} \right.$$

$$(5.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists c_1 > 0, \exists c_2 \geq 0 : \\ \langle A(t)v, v \rangle \geq c_1 \|v\|_V^2 - c_2 \|v\|_U^2 \quad \forall t \in [0,T], \end{array} \right.$$

$$(5.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} B(v) = \tilde{B}(v,v), \tilde{B}: V \times V \rightarrow W' \text{ bilinéaire} \\ \exists c > 0 : \| B(v) \|_{W'} \leq c \|v\|_V^2, \end{array} \right.$$

$$(5.11) \quad \langle \tilde{B}(v,w), w \rangle = 0 \quad \forall w \in W, \forall v \in V,$$

$$(5.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall m \in \mathbb{N}, \exists c_m > 0 : \\ | \langle A(t)u, \vartheta \rangle | \leq c_m \|u\|_U \| \vartheta \|_{W'} , \quad | \langle B(u), \vartheta \rangle | \leq c_m \|u\|_U^2 \| \vartheta \|_{W'} \\ \forall t \in [0,T] \quad \forall \vartheta \in U_m. \end{array} \right.$$

La donnée initiale est

$$(5.13) \quad u_0 \in U.$$

En outre, on suppose éventuellement que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe un processus stochastique } g \text{ à valeurs dans } W' \end{array} \right.$$

et un nombre $p > 1$ tels que

$$(5.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} g \in L^1(0,T;W') \quad \text{p.s.}, \\ G(t) = \int_0^t g(s)ds \quad \text{dans } W' \quad \text{p.s.}, \\ E \| g \|_{L^1(0,T;W')}^p < \infty, \end{array} \right.$$

il existe un processus stochastique Q à valeurs dans $W' \otimes W'$ et un nombre $\tilde{p} > 1$ tels que

$$(5.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q \in L^1(0,T;\mathcal{L}^\infty(W;W')) \quad \text{p.s.}, \\ \langle H \rangle (t) = \int_0^t Q(s)ds \quad \text{p.s.}, \\ E \| Q \|_{L^1(0,T;\mathcal{L}^\infty(W;W'))}^{\tilde{p}} < \infty, \end{array} \right.$$

où $\mathcal{L}^\infty(W;W')$ est l'espace des opérateurs compacts muni de la norme

$$\| \cdot \|_{\mathcal{L}(W;W')}.$$

Ou bien, on suppose que

$$(5.16) \quad \exists c > 0, \exists \alpha \in]0,2] : \| B(v) \|_{W'} \leq c \|v\|_U^\alpha \|v\|_V^{2-\alpha} \quad \forall v \in V,$$

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction réelle $\gamma(\varepsilon; \cdot)$ définie sur $[0,T]$, continue et telle que $\gamma(\varepsilon;0) = 0$ et que

$$(5.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} P(\{\omega \in \Omega : \forall \delta \in [0,T], S(\omega;\delta) \leq \gamma(\varepsilon;\delta)\}) \geq 1 - \varepsilon, \\ \text{où} \\ S(\omega;\delta) = \sup \{ \text{Var}_{W'}(G(\omega); t_1, t_2) : [t_1, t_2] \subset [0,T], t_2 - t_1 \leq \delta \}, \end{array} \right.$$

$$(5.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } p > 0, \bar{\alpha} > 0, c > 0 \text{ tels que} \\ \forall [s,t] \subset [0,T], E(Tr \langle H \rangle (t) - Tr \langle H \rangle (s))^p \leq c(t-s)^{1+\bar{\alpha}}. \end{array} \right.$$

Sous ces hypothèses, on obtient les résultats suivants.

THÉOREME 5.1. Supposons que les hypothèses (5.1)-(5.15) sont vérifiées. Alors il existe une base stochastique $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in [0, T]}, \tilde{\mathbb{P}})$ et des variables aléatoires

$$u : \tilde{\Omega} \rightarrow L^2(0, T; U),$$

$$\tilde{G} : \tilde{\Omega} \rightarrow C(0, T; U),$$

$$\tilde{H} : \tilde{\Omega} \rightarrow C(0, T; U),$$

qui satisfont aux conditions suivantes (5.19)-(5.22):

$$(5.19) \quad u \in L^2(0, T; V) \quad \tilde{\mathbb{P}}\text{-p.s.},$$

$$(5.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour toute fonction } \varphi : C(0, T; U) \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue et bornée,} \\ \text{on a} \\ \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \varphi(G+H) = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \varphi(\tilde{G}+\tilde{H}), \end{array} \right.$$

$$(5.21) \quad \tilde{H} \text{ est une martingale par rapport à } (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in [0, T]}, \tilde{\mathbb{P}}),$$

$$(5.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour toute fonction } \psi_r(\cdot) = \psi_r(\tilde{\omega}; \cdot) : \tilde{\Omega} \rightarrow C^1(0, T; \mathbb{R}) \\ \text{(avec } r \in [0, T]) \text{ bornée (c'est-à-dire que } \exists c > 0 : \\ \|\psi_r(\tilde{\omega}; \cdot)\|_{C^1(0, T; \mathbb{R})} \leq c \forall \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}), \text{ mesurable par rapport} \\ \text{à } \tilde{\mathcal{F}}_t \text{ et telle que, si } r > 0, \\ \psi_r(t) = 0 \quad \forall t \in [0, r] \cup \{T\}, \\ \text{ou, si } r = 0, \\ \psi_r(T) = 0, \end{array} \right.$$

$$(5.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \text{ et pour tout } \vartheta \in W, \text{ on a} \\ \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[\int_0^T \psi'_r(t) \varphi(\langle u(t), \vartheta \rangle) dt \right. \\ \left. - \int_0^T \psi_r(t) \varphi'(\langle u(t), \vartheta \rangle) (\langle A(t)u(t), \vartheta \rangle + \langle B(u(t)), \vartheta \rangle) dt \right. \\ \left. + \int_0^T \langle \psi_r(t) \varphi'(\langle u(t), \vartheta \rangle), d\tilde{G}(t) \rangle \right] = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} + \frac{1}{2} \int_0^T \langle \psi_r(t) \varphi''(\langle u(t), \vartheta \rangle) (\vartheta \otimes \vartheta), d\langle \tilde{H} \rangle(t) \rangle = \\ = - \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \psi_r(0) \varphi(\langle u_0, \vartheta \rangle). \quad \square \end{array} \right.$$

THÉOREME 5.2. Supposons que les hypothèses (5.1)-(5.13), (5.16)-(5.18) sont vérifiées. Alors il existe une base stochastique $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in [0, T]}, \tilde{\mathbb{P}})$ et des variables aléatoires

$$u : \tilde{\Omega} \rightarrow L^2(0, T; U),$$

$$\tilde{G} : \tilde{\Omega} \rightarrow C(0, T; U),$$

$$\tilde{H} : \tilde{\Omega} \rightarrow C(0, T; U),$$

qui satisfont aux conditions (5.19)-(5.21) et à la condition suivante:

$$(5.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } \vartheta \in W, \text{ le processus} \\ M^\vartheta(t) = \langle u(t) - u_0 - \tilde{G}(t), \vartheta \rangle \\ + \int_0^t (\langle A(s)u(s), \vartheta \rangle + \langle B(u(s)), \vartheta \rangle) ds \\ \text{est une martingale par rapport à } (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in [0, T]}, \tilde{\mathbb{P}}) \\ \text{avec le processus croissant associé} \\ \langle M^\vartheta \rangle(t) = \int_0^t \langle \vartheta \otimes \vartheta, d\langle \tilde{H} \rangle(s) \rangle \quad \tilde{\mathbb{P}}\text{-p.s.}, \\ \text{et telle que } M^\vartheta(0) = 0 \quad \tilde{\mathbb{P}}\text{-p.s.} \quad \square \end{array} \right.$$

En réalité, il n'est pas difficile de généraliser quelque peu les conditions sur les données des théorèmes 5.1, 5.2, en ajoutant, à côté de G et de H , un processus stochastique F adapté (par rapport à $\mathcal{F}_t$) continu à valeurs dans V' tel qu'il existe un processus stochastique f satisfaisant aux relations suivantes:

$$F(t) = \int_0^t f(s) ds \quad \text{p.s.},$$

$$E\|f\|_{L^2(0,T;V')}^4 < \infty.$$

C'est-à-dire que les théorèmes 5.1, 5.2 resteront vrais même si on ajoute

$$\int_0^T \psi_r(t) \varphi'(\langle u(t), \vartheta \rangle) \langle \tilde{f}(t), \vartheta \rangle dt$$

à l'expression se trouvant sous l'espérance mathématique $E_{\tilde{F}}$ dans (5.22), ou si on ajoute

$$- \int_0^t \langle \tilde{f}(s), \vartheta \rangle ds$$

dans l'expression de $M^{\vartheta}(t)$ dans (5.23), où $\tilde{f}$ est une variable aléatoire: $\tilde{\Omega} \rightarrow L^2(0,T;V')$ (dont l'existence fait partie de l'énoncé du théorème comme celle de $\tilde{G}$ et de $\tilde{H}$) et devra être égale en loi à f sur $L^2(0,T;V')$.

Quant à la démonstration de cette généralisation des théorèmes 5.1, 5.2, elle est naturellement analogue à celle de ces théorèmes-ci. Le seul point où on doit être particulièrement attentif aux différences dues à l'introduction de F sera la preuve des estimations du type (5.26), (5.27), comme on verra dans la remarque qui suit le lemme 5.3. Pour les estimations du type (5.33), (5.38), les parties où F figure pourront être traitées plus facilement que celles où le processus G est présent. Dans l'espace produit $Y_{(1)}$, on a à ajouter un espace facteur

$$Y^{\tilde{f}} = L^2(0,T;V'),$$

ce qui cependant ne causera aucune difficulté dans la démonstration.

2. - Solutions approchées et leurs estimations.

Commençons par la démonstration du lemme suivant.

LEMME 5.3. Supposons que les hypothèses (5.1)-(5.13) sont vérifiées et posons

$$(5.24) \quad G^m = Pr_m G, \quad H^m = Pr_m H, \quad u_0 = Pr_m u_0.$$

Alors il existe un processus stochastique u^m continu à valeurs dans U_m et tel que, pour tout $v \in U_m$, on ait

$$(5.25) \quad \begin{aligned} \langle u^m(t), v \rangle &= \langle u_0^m, v \rangle - \int_0^t \langle A(s)u^m(s), v \rangle ds \\ &\quad - \int_0^t \langle B(u^m(s)), v \rangle ds + \langle G^m(t) + H^m(t), v \rangle \quad \text{p.s..} \end{aligned}$$

(Un tel u^m sera appelé solution approchée.) Pour m fixé, la solution approchée u^m est unique. Les solutions approchées u^m ($m = 1, 2, \dots$) vérifient les estimations suivantes:

$$(5.26) \quad E \sup_{0 \leq t \leq T} \|u^m(t)\|_U^4 \leq c_1 < \infty,$$

$$(5.27) \quad E \left[\int_0^T \|u^m(t)\|_V^2 dt \right]^2 \leq c_2 < \infty,$$

$$(5.28) \quad E \sup_{0 \leq t \leq T} \|u^m(t)\|_U^2 + E \int_0^T \|u^m(t)\|_V^2 dt \leq c_3 < \infty,$$

où c_1, c_2, c_3 sont des constantes indépendantes de m . □

DÉMONSTRATION. D'une manière analogue à celle illustrée dans [BT], on résout, pour tout $\omega \in \Omega$, le système d'équations en $z^m(\cdot) = z^m(\omega; \cdot) : [0, T] \rightarrow U_m$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle z^m(t), e_j \rangle + \langle A(t)z^m(t), e_j \rangle + \langle B(z^m(t)), e_j \rangle \\ + \langle \tilde{B}(G^m(\omega; t) + H^m(\omega; t), z^m(t)), e_j \rangle \end{cases}$$

$$(5.29) \quad \begin{cases} + \langle \tilde{B}(z^m(t), G^m(\omega; t) + H^m(\omega; t)), e_j \rangle = \\ = - \langle B(G^m(\omega; t) + H^m(\omega; t)), e_j \rangle \\ - \langle A(t)(G^m(\omega; t) + H^m(\omega; t)), e_j \rangle \quad j = 1, \dots, m, \\ z^m(0) = u_0^m, \end{cases}$$

et on pose

$$u^m(\omega; t) = z^m(\omega; t) + G^m(\omega; t) + H^m(\omega; t).$$

On voit alors que $u^m(\cdot) = u^m(\omega; \cdot)$ est un processus stochastique continu à valeurs dans U_m et est le seul processus continu qui satisfait à (5.25) (pour les détails, voir [BT]).

Si on applique maintenant la formule d'Ito à

$$(u^m(t)|u^m(t))_U = (z^m(t) + G^m(t) + H^m(t)|z^m(t) + G^m(t) + H^m(t))_U,$$

on voit alors que

$$\begin{aligned} (u^m(t)|u^m(t))_U - (u_0^m|u_0^m)_U &= \\ &= 2 \int_0^t \langle u^m(s), \frac{d}{ds} z^m(s) \rangle ds + 2 \int_0^t \langle u^m(s), dG^m(s) \rangle + 2 \int_0^t \langle u^m(s), dH^m(s) \rangle \\ &\quad + \int_0^t \langle 1, d\langle H^m \rangle(s) \rangle \quad \text{p.s..} \end{aligned}$$

Mais, si on substitue l'expression de (5.29) à $\frac{d}{ds} z^m(s)$ dans cette dernière relation et si on tient compte de (5.11), on obtient, d'une manière analogue au lemme 4.3,

$$(5.30) \quad \begin{aligned} (u^m(t)|u^m(t))_U - (u_0^m|u_0^m)_U &= \\ &= - 2 \int_0^t \langle A(s)u^m(s), u^m(s) \rangle ds + 2 \int_0^t \langle u^m(s), dG^m(s) \rangle \\ &\quad + 2 \int_0^t \langle u^m(s), dH^m(s) \rangle + \int_0^t \langle 1, d\langle H^m \rangle(s) \rangle \quad \text{p.s..} \end{aligned}$$

En vertu de (5.9), on déduit de (5.30) que

$$(5.31) \quad \begin{aligned} \|u^m(t)\|_U^2 + 2c_1 \int_0^t \|u^m(s)\|_V^2 ds &\leq \\ &\leq \|u_0^m\|_U^2 + 2c_2 \int_0^t \|u^m(s)\|_U^2 ds + 2 \left| \int_0^t \langle u^m(s), dG^m(s) \rangle \right| \\ &\quad + 2 \left| \int_0^t \langle u^m(s), dH^m(s) \rangle \right| + \int_0^t \langle 1, d\langle H^m \rangle(s) \rangle \quad \text{p.s..} \end{aligned}$$

Comme

$$\int_0^t \|u^m(s)\|_V^2 ds \geq 0,$$

si on applique le lemme de Gronwall à la fonction $\varphi(t) = \|u^m(t)\|_U^2$ dans (5.31), on obtient

$$(5.32) \quad \begin{aligned} \|u^m(t)\|_U^2 &\leq e^{2c_2 t} [\|u_0^m\|_U^2 + 2 \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \langle u^m(s), dG^m(s) \rangle \right| \\ &\quad + 2 \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \langle u^m(s), dH^m(s) \rangle \right| + \text{Tr}\langle H \rangle(T)] \quad \text{p.s..} \end{aligned}$$

Mais, comme dans (4.33), (4.34), on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \langle u^m(s), dG^m(s) \rangle \right|^2 &\leq \\ &\leq \varepsilon \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u^m(t)\|_U^4 + c(\varepsilon) \mathbb{E}(\text{Var}_U(G; 0, T))^4, \\ \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \langle u^m(s), dH^m(s) \rangle \right|^2 &\leq \\ &\leq \varepsilon \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u^m(t)\|_U^4 + c(\varepsilon) \mathbb{E}(\text{Tr}\langle H \rangle(T))^2. \end{aligned}$$

Dans ces inégalités, on peut prendre

$$\varepsilon = \frac{1}{4} e^{-4c_2 T}.$$

Par suite, le carré de (5.32) donne l'inégalité

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u^m(t)\|_U^4 \leq C(\|u_0\|_U^4 + \mathbb{E}(\text{Var}_U(G; 0, T))^4 + \mathbb{E}(\text{Tr}\langle H \rangle(t))^2)$$

avec une constante C indépendante de m , ce qui, en vertu de (5.6),

(5.7), nous permet d'obtenir (5.26).

L'estimation (5.27) résulte, comme on le voit facilement, des relations (5.26), (5.31) et des estimations de

$$\mathbb{E} \sup \left| \int_0^t \langle u^m(s), dG^m(s) \rangle \right|^2$$

et de

$$\mathbb{E} \sup \left| \int_0^t \langle u^m(s), dH^m(s) \rangle \right|^2,$$

estimations qu'on vient d'obtenir.

A la fin, (5.28) est une conséquence immédiate de (5.26), (5.27), ce qui achève la démonstration du lemme. ■

REMARQUE. Si nous considérons l'équation avec la présence d'un processus stochastique

$$F(t) = \int_0^t f(s) ds$$

à côté de $G(t)$ et de $H(t)$ comme nous l'avons mentionné à la fin du paragraphe précédent, alors nous avons à ajouter

$$2 \int_0^t \langle u^m(s), f^m(s) \rangle ds \quad (f^m = Pr_m f)$$

au deuxième membre de (5.30). Nous avons donc à ajouter

$$c_1 \int_0^t \|u^m(s)\|_V^2 ds + \frac{1}{c_1} \int_0^t \|f^m(s)\|_V^2 ds$$

au deuxième membre de (5.31). L'estimation

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{c_1} \int_0^t \|f^m(s)\|_V^2 ds \right]^2 \leq \mathbb{E} \|f\|_{L^2(0, T; V')}^4 < \infty$$

nous permettra alors d'obtenir (5.26)-(5.28) même pour l'équation avec la présence de

$$F(t) = \int_0^t f(s) ds. \square$$

Comme dans le chapitre précédent, nous aurons besoin des estimations probabilistes de $u^m(t+\delta) - u^m(t)$, qui joueront dans la démonstration des théorèmes 5.1, 5.2 un rôle analogue aux lemmes 4.6, 4.7 dans la démonstration des théorèmes 4.1, 4.2. Ces estimations vont être établies en s'appuyant sur des idées qui nous ont conduits aux lemmes 4.6, 4.7.

LEMME 5.4. Supposons que les hypothèses (5.1)-(5.13) sont vérifiées. Alors pour tout $\alpha' < 1$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $c(\varepsilon) = c(\alpha'; \varepsilon)$ indépendante de m et telle que

$$(5.33) \quad \mathbb{P}(\{\omega: \sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ \|w\| \leq 1}} \delta^{-\alpha'} \int_0^{T-\delta} |\langle u^m(t+\delta) - u^m(t), w \rangle|^2 dt \leq c(\varepsilon)\}) \geq 1 - \varepsilon. \square$$

Afin de démontrer les théorèmes 5.1, 5.2, on ne se servira de ce lemme que dans le cas où $\alpha' \in]0, 1[$ (cfr. le lemme 5.9).

DÉMONSTRATION. On suppose pour le moment que $w \in U_m$. Alors, on déduit de (5.25) que

$$(5.34) \quad \begin{aligned} & |\langle u^m(t+\delta) - u^m(t), w \rangle|^2 \leq \\ & \leq |\langle u^m(t+\delta) - u^m(t), w \rangle| \times \\ & \quad \times \left[\int_t^{t+\delta} (|\langle A(s)u^m(s), w \rangle| + |\langle B(u^m(s)), w \rangle|) ds \right. \\ & \quad \left. + |\langle G^m(t+\delta) - G^m(t), w \rangle| + |\langle H^m(t+\delta) - H^m(t), w \rangle| \right]. \end{aligned}$$

Mais, en vertu de (5.8), (5.10), on a

$$\begin{aligned} & \int_0^{T-\delta} |\langle u^m(t+\delta) - u^m(t), w \rangle| \int_t^{t+\delta} \Gamma(s) ds dt \leq \\ & \leq c \int_0^{T-\delta} (\|u^m(t+\delta)\|_U + \|u^m(t)\|_U) \int_t^{t+\delta} (\|u^m(s)\|_V + \|u^m(s)\|_V^2) ds dt = \\ & = c \int_0^T (\|u^m(s)\|_V + \|u^m(s)\|_V^2) \int_{0 \vee (s-\delta)}^{s \wedge (T-\delta)} (\|u^m(t+\delta)\|_U + \|u^m(t)\|_U) dt ds \end{aligned}$$

où

$$\Gamma(s) = |\langle A(s)u^m(s), w \rangle| + |\langle B(u^m(s)), w \rangle|,$$

donc

$$\begin{aligned} (5.35) \quad & \int_0^{T-\delta} |\langle u^m(t+\delta) - u^m(t), w \rangle| \int_t^{t+\delta} \Gamma(s) ds dt \leq \\ & \leq 2c\delta \sup_{0 \leq t \leq T} \|u^m(t)\|_U (\|u^m\|_{L^2(0,T;V)} + \|u^m\|_{L^2(0,T;V)}^2). \end{aligned}$$

D'autre part, on a évidemment

$$\begin{aligned} (5.36) \quad & \int_0^{T-\delta} |\langle u^m(t+\delta) - u^m(t), w \rangle| |\langle G^m(t+\delta) - G^m(t), w \rangle| dt \leq \\ & \leq c \sup_{0 \leq t \leq T} \|u^m(t)\|_U \int_0^{T-\delta} \text{Var}_U(G^m; t, t+\delta) dt \leq \\ & \leq c\delta \sup_{0 \leq t \leq T} \|u^m(t)\|_U \text{Var}_U(G; 0, T). \end{aligned}$$

Nous considérons maintenant

$$\delta^{-\alpha'} \int_0^{T-\delta} |\langle H^m(t+\delta) - H^m(t), w \rangle|^2 dt.$$

Définissons $I_n =]2^{-n}T, 2^{-n+1}T]$ ($n = 1, 2, \dots$) et prolongeons H^m à droite en posant $H^m(t) = H^m(T)$ pour $t \geq T$. On a alors

$$\mathbb{E}_{\delta \in I_n} \delta^{-\alpha'} \int_0^{T-\delta} |\langle H^m(t+\delta) - H^m(t), w \rangle|^2 dt \leq$$

$$\begin{aligned} & \leq 2^{n\alpha'} T^{-\alpha'} 4 \int_0^{T-2^{-n}T} \mathbb{E}(\langle \langle H^m, w \rangle \rangle(t+2^{-n+1}) - \langle \langle H^m, w \rangle \rangle(t)) dt \leq \\ & \leq c 2^{n(\alpha'-1)} \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|\langle H \rangle(t)\|_{\otimes 1}, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} (5.37) \quad & \mathbb{P}(\{\omega: \sup_{0 \leq \delta \leq T} \delta^{-\alpha'} \int_0^{T-\delta} |\langle H^m(t+\delta) - H^m(t), w \rangle|^2 dt \geq \frac{1}{\varepsilon_0}\}) \leq \\ & \leq \varepsilon_0 c \mathbb{E} \|\langle H \rangle(t)\|_{\text{Tr}} \sum_{n=1}^{\infty} (2^{-1+\alpha'})^n \equiv \varepsilon_0 c' < \infty \end{aligned}$$

(pour les détails, voir la déduction de (4.42)).

Compte tenu de la relation

$$\begin{aligned} & |\langle u^m(t+\delta) - u^m(t), w \rangle| |\langle H^m(t+\delta) - H^m(t), w \rangle| \leq \\ & \leq \frac{1}{2} |\langle u^m(t+\delta) - u^m(t), w \rangle|^2 + \frac{1}{2} |\langle H^m(t+\delta) - H^m(t), w \rangle|^2, \end{aligned}$$

on déduit de (5.27), (5.28), (5.34)-(5.37) que la relation (5.33) est vraie sous la restriction $w \in U_m$. Mais la condition (5.4) et l'égalité évidente

$$\langle u^m(t+\delta) - u^m(t), w \rangle = \langle u^m(t+\delta) - u^m(t), \text{Pr}_m w \rangle$$

nous permettent d'enlever cette restriction, de sorte que la relation (5.33) est vérifiée sans restriction aucune. Le lemme est démontré. ■

LEMME 5.5. Supposons que les hypothèses (5.1)-(5.13), (5.16)-(5.18) sont vérifiées. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\beta(\cdot) = \beta(\varepsilon; \cdot)$ définie sur $[0, T]$, continue, indépendante de m et telle que $\beta(\varepsilon; 0) = 0$ et que, pour les solutions approchées u^m , on ait

$$(5.38) \quad \mathbb{P}(\{\omega: \forall \delta \in [0, T], \forall w \in W: \|w\|_W = 1, S_1(m, \omega; \delta, w) \leq \beta(\varepsilon; \delta)\}) \geq 1 - \varepsilon,$$

où

$$S_1(m, \omega; \delta, w) = \sup\{|\langle u^m(\omega; t) - u^m(\omega; s), w \rangle| : 0 \leq s \leq t \leq T, t - s \leq \delta\}.$$

DÉMONSTRATION. Comme dans le lemme précédent, il suffit de démontrer le lemme avec la restriction $w \in U_m$ dans la relation (5.38).

On suppose donc que $w \in U_m$. Alors, on déduit de (5.25) que

$$(5.39) \quad \begin{aligned} & |\langle u^m(t) - u^m(s), w \rangle| \leq \\ & \leq \int_s^t |\langle A(r)u^m(r), w \rangle + \langle B(u^m(r)), w \rangle| dr \\ & + |\langle G^m(t) - G^m(s), w \rangle| + |\langle H^m(t) - H^m(s), w \rangle|. \end{aligned}$$

Il résulte immédiatement de (5.8), (5.16) que

$$(5.40) \quad \begin{aligned} & \int_s^t |\langle A(r)u^m(r), w \rangle + \langle B(u^m(r)), w \rangle| dr \leq \\ & \leq c(t - s)^{1/2} \|u^m\|_{L^2(0, T; V)} \\ & + c(t - s)^{\alpha/2} \left(\sup_{0 \leq r \leq T} \|u^m(r)\|_U \right)^\alpha \|u^m\|_{L^2(0, T; V)}^{2-\alpha}. \end{aligned}$$

D'autre part, si on applique le lemme 4.8 à la martingale H , qui, par hypothèse, jouit de la propriété (5.18), on voit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction réelle $\beta_1(\cdot) = \beta_1(\varepsilon; \cdot)$ continue sur $[0, T]$ et telle que $\beta_1(0) = 0$ et que

$$\mathbb{P}(\{\omega: \forall \delta \in [0, T] \sup\{\|H(t) - H(s)\|_U : 0 \leq s \leq t \leq T, t - s \leq \delta\} \leq \beta_1(\delta)\}) \geq 1 - \varepsilon.$$

On a d'autre part

$$|\langle H^m(t) - H^m(s), w \rangle| \leq c \|H(t) - H(s)\|_U \quad \forall w \in U_m \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Le lemme résulte de cette estimation de $|\langle H^m(t) - H^m(s), w \rangle|$, des estimations (5.39), (5.40), (5.28), et de la conséquence immédiate de (5.17) sur $|\langle G^m(t) - G^m(s), w \rangle|$.

3. - Espace produit de base.

On va d'abord définir, d'une manière analogue à (4.50)-(4.51), les espaces $(L^2(0, T; V) \text{ faible})^*$, $(BV(0, T; U) \text{ faible})^*$, $(BV(0, T; \mathcal{L}(U; U)) \text{ faible})^*$.

Soient $\{v_k\}$, $\{b_k\}$, $\{c_k\}$ des bases normalisées de $L^2(0, T; V)$, $C(0, T; U)$, $C(0, T; \mathcal{L}^1(U; U))$ respectivement (où $\mathcal{L}^1(U; U)$ est l'espace des opérateurs nucléaires muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1(U; U)} = \|\cdot\|_{\mathcal{O}_1}$, qui est un espace de Banach séparable et dont l'espace dual est $\mathcal{L}(U; U)$). Les espaces $(L^2(0, T; V) \text{ faible})^*$, $(BV(0, T; U) \text{ faible})^*$, $(BV(0, T; \mathcal{L}(U; U)) \text{ faible})^*$ sont, par définition, composés respectivement par les éléments u de $L^2(0, T; V)$, par les fonctions $\tilde{G}: [0, T] \rightarrow U$ à variation bornée telles que $\tilde{G}(0) = 0$ et par les fonctions $\tilde{I}: [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(U; U)$ à variation bornée telles que $\tilde{I}(0) = 0$ et munis respectivement des normes suivantes:

$$(5.41) \quad \|u\|_{(L^2(0, T; V) \text{ faible})^*} = \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |\langle u, v_k \rangle_{0V}|^2 \right]^{1/2},$$

$$(5.42) \quad \|\tilde{G}\|_{(BV(0, T; U) \text{ faible})^*} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left| \int_0^T \langle b_k(t), d\tilde{G}(t) \rangle \right|,$$

$$(5.43) \quad \|\tilde{I}\|_{(BV(0, T; \mathcal{L}(U; U)) \text{ faible})^*} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left| \int_0^T \langle c_k(t), d\tilde{I}(t) \rangle \right|,$$

où la notation $\langle \cdot, \cdot \rangle_{ov}$ désigne le produit scalaire de l'espace de Hilbert $L^2(0, T; V)$, c'est-à-dire

$$\langle u, v_k \rangle_{ov} = \int_0^T (u(t) | v_k(t))_V dt.$$

Les propriétés prouvées dans le lemme 4.10 se généralisent évidemment à ces espaces.

LEMME 5.6. Les propriétés i), ii), iii) du lemme 4.10 avec le changement évident d'espaces sont vérifiées même pour les espaces $(L^2(0, T; V) \text{ faible})^*$, $(BV(0, T; U) \text{ faible}^*)^*$, $(BV(0, T; \mathcal{L}(U; U)) \text{ faible}^*)^*$. $\square$

DÉMONSTRATION. Le lemme se démontre de la même manière que le lemme 4.10. $\blacksquare$

Définissons maintenant les espaces produits $Y_{(1)}$, $Y_{(2)}$:

$$(5.44) \quad Y_{(1)} = Y^u \times Y^{\tilde{G}} \times Y^{\tilde{H}} \times Y^{\tilde{I}},$$

$$(5.45) \quad Y_{(2)} = Y^{*u} \times Y^{*\tilde{G}} \times Y^{\tilde{H}} \times Y^{*\tilde{I}},$$

munis des tribus boréliennes $\mathcal{B}(Y_{(1)})$, $\mathcal{B}(Y_{(2)})$ respectivement, où

$$(5.46) \quad \begin{cases} Y^u = (L^2(0, T; V) \text{ faible})^* \cap L^2(0, T; U), \\ Y^{*u} = Y^u \cap C(0, T; W'), \\ Y^{\tilde{G}} = C(0, T; U) \cap W_1^1(0, T; W'), \\ Y^{*\tilde{G}} = C(0, T; U) \cap (BV(0, T; U) \text{ faible}^*)^*, \\ Y^{\tilde{H}} = C(0, T; U), \\ Y^{\tilde{I}} = C(0, T; \mathcal{L}^1(U; U)) \cap W_1^1(0, T; \mathcal{L}^\infty(W; W')), \\ Y^{*\tilde{I}} = C(0, T; \mathcal{L}^1(U; U)) \cap (BV(0, T; \mathcal{L}(U; U)) \text{ faible}^*)^*. \end{cases}$$

Il est clair que, comme dans les lemmes 4.11, 4.12, les

propriétés suivantes sont vérifiées.

LEMME 5.7. Soit $\{\tilde{P}^m\}$ une suite de mesures de probabilité définies sur $Y_{(1)}$ ($i = 1, 2$) qui converge faiblement vers une mesure de probabilité $\tilde{P}$. Alors il existe un espace de probabilité $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ et des variables aléatoires η , η^m tels que, si on définit $\mathbb{P}'^\eta$, $\mathbb{P}'^{\eta^m}$ par la relation

$$\mathbb{P}'^\eta(A) = \mathbb{P}'(\{\omega' \in \Omega' : \eta(\omega') \in A\}) \quad \forall A \in \mathcal{B}(Y_{(1)})$$

et par la relation analogue pour $\mathbb{P}'^{\eta^m}$, on a

$$(5.47) \quad \tilde{P} = \mathbb{P}'^\eta, \quad \tilde{P}^m = \mathbb{P}'^{\eta^m} \quad \text{en loi sur } (Y_{(1)}, \mathcal{B}(Y_{(1)})),$$

$$(5.48) \quad \eta^m(\omega') \rightarrow \eta(\omega') \quad \text{dans } Y_{(1)} \quad \text{pour } m \rightarrow \infty$$

$\mathbb{P}'$ -presque tout $\omega' \in \Omega'$.

Par conséquent, pour $m \rightarrow \infty$ et pour $\mathbb{P}'$ -presque tout $\omega' \in \Omega'$, on a, s'il s'agit de $Y_{(1)}$,

$$(5.49) \quad \begin{cases} P_u^{\eta^m}(\omega') \rightarrow P_u^\eta(\omega') & \text{dans } Y^u, \\ P_{\tilde{G}}^{\eta^m}(\omega') \rightarrow P_{\tilde{G}}^\eta(\omega') & \text{dans } Y^{\tilde{G}}, \\ P_{\tilde{H}}^{\eta^m}(\omega') \rightarrow P_{\tilde{H}}^\eta(\omega') & \text{dans } Y^{\tilde{H}}, \\ P_{\tilde{I}}^{\eta^m}(\omega') \rightarrow P_{\tilde{I}}^\eta(\omega') & \text{dans } Y^{\tilde{I}}, \end{cases}$$

et, s'il s'agit de $Y_{(2)}$,

$$(5.50) \quad \begin{cases} P_{*u}^{\eta^m}(\omega') \rightarrow P_{*u}^\eta(\omega') & \text{dans } Y^{*u}, \\ P_{*\tilde{G}}^{\eta^m}(\omega') \rightarrow P_{*\tilde{G}}^\eta(\omega') & \text{dans } Y^{*\tilde{G}}, \\ P_{\tilde{H}}^{\eta^m}(\omega') \rightarrow P_{\tilde{H}}^\eta(\omega') & \text{dans } Y^{\tilde{H}}, \\ P_{*\tilde{I}}^{\eta^m}(\omega') \rightarrow P_{*\tilde{I}}^\eta(\omega') & \text{dans } Y^{*\tilde{I}}, \end{cases}$$

où P_u etc... désignent la projection de $Y_{(1)}$ ($i = 1, 2$) sur Y^u

etc...□

DÉMONSTRATION. Le lemme se démontre de la même manière que le lemme 4.11. ■

LEMME 5.8. Supposons que la suite $\{\tilde{P}^m\}$ de mesures de probabilité définies sur $Y_{(i)}$ ($i = 1, 2$) converge faiblement vers une mesure de probabilité $\tilde{P}$. Soit $\Phi(y)$ une fonction continue définie sur $Y_{(i)}$ ($i = 1, 2$). S'il existe un nombre $p > 1$ tel que

$$(5.51) \quad \sup_m \int_{Y_{(i)}} |\Phi(y)|^p \tilde{P}^m(dy) < \infty,$$

alors on a

$$(5.52) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{Y_{(i)}} \Phi(y) \tilde{P}^m(dy) = \int_{Y_{(i)}} \Phi(y) \tilde{P}(dy). \quad \square$$

DÉMONSTRATION. Voir [V2], chap.1, lemme 2.7 (voir aussi le lemme 4.12). ■

Définissons maintenant les espaces $Y_t^u, Y_t^{*u}, Y_t^{\tilde{G}}, Y_t^{*\tilde{G}}, Y_t^{\tilde{H}}, Y_t^{\tilde{I}}, Y_t^{*\tilde{I}}$, en remplaçant T par $t \in [0, T]$ dans les définitions de Y^u etc... (on ne change pas les bases $\{v_k\}, \{b_k\}, \{c_k\}$ utilisées pour la définition de $Y^u, Y^{*\tilde{G}}, Y^{*\tilde{I}}$, mais on restreint les fonctions v_k, b_k, c_k à $[0, t]$, comme dans la construction de (4.61)-(4.62)). Nous posons

$$(5.53) \quad Y_{(1)t} = Y_t^u \times Y_t^{\tilde{G}} \times Y_t^{\tilde{H}} \times Y_t^{\tilde{I}},$$

$$(5.54) \quad Y_{(2)t} = Y_t^{*u} \times Y_t^{*\tilde{G}} \times Y_t^{\tilde{H}} \times Y_t^{*\tilde{I}}.$$

Définissons en outre, d'une manière analogue à (4.63), la sous-tribu $\tilde{\mathcal{F}}_t$ de $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{B}(Y_{(i)})$ ($i = 1, 2$) par la relation

$$(5.55) \quad \tilde{\mathcal{F}}_t = \{A \in \tilde{\mathcal{F}} : \exists A' \in \mathcal{B}(Y_{(1)t}) : A = \{y \in Y_{(1)} : y|_{[0,t]} \in A'\}\}.$$

Rappelons aussi une généralisation du lemme de Ladyzhenskaya sur la compacité dans l'espace $L^2(0, T; U)$.

LEMME 5.9. Soient U, V, W trois espaces de Hilbert séparables satisfaisant aux conditions (5.1)-(5.4). Soit A une partie de $L^2(0, T; U)$. Supposons que A est bornée dans $L^2(0, T; V)$ et qu'il existe une fonction $\bar{\beta}(\cdot)$ continue sur $[0, T]$, nulle à l'origine et telle que, pour tout $u \in A$, on ait

$$(5.56) \quad \int_0^{T-\delta} |\langle u(t+\delta) - u(t), w \rangle|^2 dt \leq \bar{\beta}(\delta) \|w\|_W^2 \quad \forall \delta \in [0, T], \quad \forall w \in W.$$

Alors A est relativement compacte dans $L^2(0, T; U)$. □

DÉMONSTRATION. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un nombre $N(n)$ tel que, pour tout $u \in U$, on ait

$$\|u\|_U^2 \leq \sum_{j=1}^{N(n)} |\langle u, e_j \rangle|^2 + \frac{1}{n} \|u\|_V^2.$$

Donc, pour extraire de A une sous-suite convergente fortement dans $L^2(0, T; U)$, il suffit qu'on puisse, pour tout n , extraire d'une suite quelconque contenue dans A une sous-suite $\{u_k^n\}_{k=1}^\infty$ telle que

$$(5.57) \quad \sum_{j=1}^{N(n)} \int_0^T |\langle u_k^n(t) - u_{k'}^n(t), e_j \rangle|^2 dt \rightarrow 0 \quad \text{pour } k, k' \rightarrow \infty.$$

En effet, en extrayant $\{u_k^{n+1}\}_{k=1}^\infty$ de $\{u_k^n\}_{k=1}^\infty$, on voit aisément que la sous-suite diagonale $\{u_n^n\}$ converge fortement dans $L^2(0, T; U)$.

Mais, puisque

$$\sup_{1 \leq j \leq N(n)} \|e_j\|_W < \infty,$$

si on modifie l'argumentation du théorème d'Ascoli-Arzelà de manière que l'on prouve la convergence dans L^2 au lieu de la

convergence ponctuelle, on voit que (5.56) implique (5.57) (pour les détails, voir [Lad], chap.VI, §7). Le lemme est démontré. ■

4. - Démonstration du théorème 5.1.

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer le théorème 5.1 et pour cela supposons que les hypothèses (5.1)-(5.15) sont vérifiées.

Posons

$$(5.58) \quad y^m(\omega) = (u^m(\omega), G^m(\omega), H^m(\omega), \langle H^m \rangle(\omega)),$$

où u^m est la solution approchée. D'après le lemme 5.3, $y^m(\cdot)$ est une variable aléatoire à valeurs dans $Y_{(1)}$. Définissons les mesures de probabilité $\mathbb{P}_{(1)}^{y^m}$ sur $(Y_{(1)}, \mathcal{B}(Y_{(1)}))$ par la relation

$$(5.59) \quad \mathbb{P}_{(1)}^{y^m}(A) = \mathbb{P}(\{\omega: y^m(\omega) \in A\}) \quad \forall A \in \mathcal{B}(Y_{(1)}).$$

On a alors le

LEMME 5.10. Supposons que les hypothèses (5.1)-(5.15) sont vérifiées. Alors il existe une sous-suite $\{\mathbb{P}_{(1)}^{y^{m'}}\}$ de $\{\mathbb{P}_{(1)}^{y^m}\}$ qui converge faiblement, c'est-à-dire qu'il existe une mesure de probabilité $\mathbb{P}_{(1)}^y$ définie sur $(Y_{(1)}, \mathcal{B}(Y_{(1)}))$ telle que, pour toute fonction $\varphi: Y_{(1)} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée, on ait

$$(5.60) \quad \int_{Y_{(1)}} \varphi(y) \mathbb{P}_{(1)}^{y^{m'}}(dy) \rightarrow \int_{Y_{(1)}} \varphi(y) \mathbb{P}_{(1)}^y(dy) \quad \text{pour } m' \rightarrow \infty.$$

DÉMONSTRATION. Comme on le voit aisément, les lemmes 5.3, 5.4, 5.6, 5.9 entraînent que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $\tilde{K}^u(\varepsilon/2)$ de Y^u tel que

$$\mathbb{P}(\{\omega: u^m(\omega) \in \tilde{K}^u(\varepsilon/2)\}) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

ou encore

$$\mathbb{P}_{(1)}^{y^m}(K^u(\varepsilon/2)) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

où

$$K^u(\varepsilon/2) = \{y: P_u y \in \tilde{K}^u(\varepsilon/2)\}.$$

D'autre part, si on rappelle la construction de G^m , H^m , $\langle H^m \rangle$,

on voit qu'il existe un compact $\tilde{K}^0(\varepsilon/2)$ de $Y^G \times Y^H \times Y^I$ tel que

$$\mathbb{P}(\{\omega: (G^m(\omega), H^m(\omega), \langle H^m \rangle(\omega)) \in \tilde{K}^0(\varepsilon/2)\}) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

ou encore

$$\mathbb{P}_{(1)}^{y^m}(K^0(\varepsilon/2)) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

où

$$K^0(\varepsilon/2) = \{y: (P_{\tilde{G}} y, P_{\tilde{H}} y, P_{\tilde{I}} y) \in \tilde{K}^0(\varepsilon/2)\}.$$

Il en résulte que l'ensemble

$$K(\varepsilon) = \tilde{K}^u(\varepsilon/2) \times \tilde{K}^0(\varepsilon/2) = K^u(\varepsilon/2) \cap K^0(\varepsilon/2)$$

est compact dans $Y_{(1)}$ et tel que

$$\mathbb{P}_{(1)}^{y^m}(K(\varepsilon)) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

D'après le critère de Prokhorov, on en déduit le lemme. ■

Nous sommes maintenant en mesure d'achever la démonstration du théorème 5.1.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.1. Posons

$$(5.61) \quad \tilde{\Omega} = Y_{(1)}, \quad \tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{B}(Y_{(1)}), \quad \tilde{\mathbb{P}} = \mathbb{P}_{(1)}^y,$$

où $\mathbb{P}_{(1)}^y$ est la mesure de probabilité limite obtenue dans le lemme 5.10. Nous notons encore m (au lieu de m') l'indice de la sous-

suite obtenue dans le lemme 5.10. Nous posons alors

$$(5.62) \quad \tilde{P}^m = P_{(1)}^{y^m}.$$

Si on pose

$$(5.63) \quad u = P_u y, \tilde{G} = P_{\tilde{G}} y, \tilde{H} = P_{\tilde{H}} y, \tilde{I} = P_{\tilde{I}} y \quad (y \in \tilde{\Omega} = Y_{(1)}),$$

$u, \tilde{G}, \tilde{H}$ sont, comme on voit immédiatement, des variables aléatoires à valeurs dans $L^2(0, T; U), C(0, T; U), C(0, T; U)$ respectivement. On a donc à démontrer que $u, \tilde{G}, \tilde{H}$ satisfont aux conditions (5.19)-(5.22).

La condition (5.19) résulte des lemmes 5.3, 5.6, 5.7 de la même manière que la démonstration de (4.10) dans le paragraphe 4 du chapitre 4 (pour les détails, voir ce dernier paragraphe).

La condition (5.20) se démontre à peu près de la même manière que la déduction de (4.11). Il suffit, en effet, de passer à la limite dans $\mathbb{E}_{\tilde{P}^m} \varphi(P_{\tilde{G}} y + P_{\tilde{H}} y)$ en tenant compte du fait que φ est continue est bornée.

La condition (5.21) se démontre d'une manière analogue à la démonstration de (4.12). En effet, $\tilde{H}(t)$ est, par construction, mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t$. Comme on a, en outre,

$$\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{P}^m(dy) \|\tilde{H}(t)\|_U^2 \leq \mathbb{E}_{\tilde{P}} \text{Tr} \langle H \rangle (T) < \infty,$$

on obtient à l'aide du lemme 5.8

$$0 = \mathbb{E}_{\tilde{P}^m} \psi_r(y) \langle \tilde{H}(t) - \tilde{H}(r), \vartheta \rangle \rightarrow \mathbb{E}_{\tilde{P}} \psi_r(y) \langle \tilde{H}(t) - \tilde{H}(r), \vartheta \rangle$$

pour tout (r, t) tel que $0 \leq r \leq t \leq T$, pour tout $\vartheta \in U$, et pour toute fonction $\psi_r(\cdot)$ bornée et continue par rapport à $y|_{[0, r]} \in Y_{(1)r}$. On en déduit (5.21).

Il ne reste que (5.22) à démontrer.

Pour toute fonction $\psi_r(\cdot)$ bornée et continue par rapport à $y|_{[0, r]} \in Y_{(1)r}$, pour toute fonction $\tilde{\varphi} \in C^3(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ et pour tout $\vartheta \in W$, on a d'après la formule d'Ito

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\tilde{P}^m} \psi_r(y) \{ \tilde{\varphi}(\langle \tilde{H}(t), \vartheta \rangle) - \tilde{\varphi}(\langle \tilde{H}(r), \vartheta \rangle) \} = \\ = \frac{1}{2} \mathbb{E}_{\tilde{P}^m} \psi_r(y) \int_r^t \langle \tilde{\varphi}''(\langle \tilde{H}(s), \vartheta \rangle) \vartheta \otimes \vartheta, \tilde{I}'(s) \rangle ds \quad (t \geq r), \end{aligned}$$

où $\tilde{I}'(s) = \frac{d}{ds} \tilde{I}(s)$. On remarque que $\tilde{I} \in Y^{\tilde{I}}$ et $\tilde{I}' \in L^1(0, T; \mathcal{L}^\infty(W; W'))$. La condition (5.15) et les définitions de $Y^{\tilde{H}}$ et de $Y^{\tilde{I}}$ nous permettent de passer à la limite dans cette égalité. Ceci signifie que, si on désigne par $\langle \tilde{H} \rangle$ le processus croissant associé à la martingale $\tilde{H}$, on a, pour tout $\vartheta \in W$,

$$(5.64) \quad \langle \vartheta \otimes \vartheta, d\langle \tilde{H} \rangle(t) \rangle = \langle \vartheta \otimes \vartheta, \tilde{I}'(t) \rangle dt \quad \tilde{P}\text{-q.s.}$$

On considère pour le moment une fonction fixée $\psi_r(\cdot) = \psi_r(y; \cdot)$ qui satisfait aux conditions indiquées dans (5.22). On fixe également $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ et $\vartheta \in \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m$. On a donc $\vartheta \in U_{m_0}$ pour un certain m_0 . Alors, d'après la formule d'Ito, il résulte de (5.25) que l'on a

$$\begin{aligned} \varphi(\langle u^m(t), \vartheta \rangle) - \varphi(\langle u_0^m, \vartheta \rangle) = \\ = \int_0^t \varphi'(\langle u^m(s), \vartheta \rangle) \{ - \langle A(s) u^m(s), \vartheta \rangle - \langle B(u^m(s)), \vartheta \rangle \} ds \\ + \int_0^t \langle \varphi'(\langle u^m(s), \vartheta \rangle) \vartheta, dG^m(s) + dH^m(s) \rangle \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t \langle \varphi''(\langle u^m(s), \vartheta \rangle) \vartheta \otimes \vartheta, \langle H^m \rangle'(s) \rangle ds \quad \text{p.s.}$$

(dans l'expression de la dernière intégrale on a tenu compte de la condition (5.15)). Comme

$$\int_0^t \langle \varphi'(\langle u^m(s), \vartheta \rangle) \vartheta, dH^m(s) \rangle$$

est une martingale, grâce aux propriétés de $\psi_r(y; \cdot)$ qu'on a supposées, on tire de cette dernière égalité la relation suivante exprimée dans l'espace de probabilité $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}^m)$ (voir (5.59), (5.61)-(5.63))

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}^m} \left[\int_0^T \psi_r'(t) \varphi(\langle u(t), \vartheta \rangle) dt \right. \\ & + \int_0^T \psi_r(t) \varphi(\langle u(t), \vartheta \rangle) \langle -A(t)u(t) - B(u(t)), \vartheta \rangle dt \\ & + \int_0^T \langle \psi_r(t) \varphi'(\langle u(t), \vartheta \rangle) \vartheta, d\tilde{G}(t) \rangle \\ & \left. + \frac{1}{2} \int_0^T \langle \psi_r(t) \varphi''(\langle u(t), \vartheta \rangle) \vartheta \otimes \vartheta, \tilde{I}'(t) \rangle dt \right] = \\ & = - \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}^m} \psi_r(0) \varphi(\langle u_0^m, \vartheta \rangle) \end{aligned} \quad (5.65)$$

(les détails de la déduction de (5.65) de la relation précédente peuvent être facilement reconstruites en faisant la comparaison avec la déduction de (4.75)).

Comme $\vartheta \in U_{m_0}$ par l'hypothèse imposée pour le moment, grâce à la condition (5.12), l'intégrale

$$\int_0^T \psi_r(y; t) \varphi'(\langle u(t), \vartheta \rangle) \langle -A(t)u(t) - B(u(t)), \vartheta \rangle dt,$$

considérée comme fonction de y , est continue par rapport à $y \in Y_{(1)}$. Comme en outre, en vertu de (5.8), (5.10), on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}^m} \left| \int_0^T \psi_r(t) \varphi'(\langle u(t), \vartheta \rangle) \langle A(t)u(t) + B(u(t)), \vartheta \rangle dt \right|^2 \leq \\ & \leq c \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}^m} [\|u^m\|_{L^2(0,T;V)}^2 + \|u^m\|_{L^2(0,T;V)}^4], \end{aligned}$$

et que $\psi_r, \psi_r', \varphi, \varphi'$ sont bornées et continues, on peut, à l'aide du lemme 5.8 et de (5.27), (5.28), passer à la limite dans les deux premiers termes de (5.65). On obtient ainsi

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}^m} \left[\int_0^T \{ \psi_r'(t) \varphi(\langle u(t), \vartheta \rangle) \right. \\ & \quad \left. - \psi_r(t) \varphi'(\langle u(t), \vartheta \rangle) \langle A(t)u(t) + B(u(t)), \vartheta \rangle \} dt \right] \\ (5.66) \quad & \rightarrow \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[\int_0^T \{ \psi_r'(t) \varphi(\langle u(t), \vartheta \rangle) \right. \\ & \quad \left. - \psi_r(t) \varphi'(\langle u(t), \vartheta \rangle) \langle A(t)u(t) + B(u(t)), \vartheta \rangle \} dt \right] \\ & \quad \text{pour } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

La condition (5.14) et le fait que $\vartheta \in U_{m_0} \subset W$ nous permettent

de substituer

$$\langle \psi_r(t) \varphi'(\langle u(t), \vartheta \rangle) \vartheta, \tilde{G}'(t) \rangle dt$$

à

$$\langle \psi_r(t) \varphi'(\langle u(t), \vartheta \rangle) \vartheta, d\tilde{G}(t) \rangle$$

dans (5.65), où $\tilde{G}'(t) = \frac{d}{dt} \tilde{G}(t) \in L^1(0, T; W')$. Comme ψ_r, φ' sont bornées, la condition (5.14), la définition de $Y^{\tilde{G}} = C(0, T; U) \cap W_1^1(0, T; W')$ et le lemme 5.8 nous permettent de passer à la limite dans l'espérance mathématique de l'intégrale par rapport à $d\tilde{G}$ dans (5.65), de sorte qu'on a

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}^m} \left[\int_0^T \langle \psi_r(t) \varphi'(\langle u(t), \vartheta \rangle) \vartheta, d\tilde{G}(t) \rangle \right]$$

(5.67)

$$\rightarrow \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[\int_0^T \langle \psi_r(t) \varphi'(\langle u(t), \vartheta \rangle) \vartheta, d\tilde{G}(t) \rangle \right] \quad \text{pour } m \rightarrow \infty.$$

D'une manière analogue, en vertu de (5.15) et de la définition de $Y^{\tilde{Q}}$, on peut passer à la limite dans l'espérance mathématique de l'intégrale relative à $\tilde{I}'$, de sorte qu'on a

$$(5.68) \quad \begin{aligned} & \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}^m \left[\int_0^T \langle \psi_r(t) \varphi''(\langle u(t), \vartheta \rangle) \vartheta \otimes \vartheta, \tilde{I}'(t) \rangle dt \right] \\ & \rightarrow \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[\int_0^T \langle \psi_r(t) \varphi''(\langle u(t), \vartheta \rangle) \vartheta \otimes \vartheta, \tilde{I}'(t) \rangle dt \right] \quad \text{pour } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Comme on a évidemment

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}^m \psi_r(0) \varphi(\langle u_0^m, \vartheta \rangle) \rightarrow \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \psi_r(0) \varphi(\langle u_0, \vartheta \rangle) \quad \text{pour } m \rightarrow \infty,$$

les relations (5.66)-(5.68) entraînent que, en passant à la limite dans (5.65) et en tenant compte de (5.64), on a

$$(5.69) \quad \begin{aligned} & \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[\int_0^T \psi_r'(t) \varphi(\langle u(t), \vartheta \rangle) dt \right. \\ & \quad + \int_0^T \psi_r(t) \varphi'(\langle u(t), \vartheta \rangle) \langle -A(t)u(t) - B(u(t)), \vartheta \rangle dt \\ & \quad + \int_0^T \langle \psi_r(t) \varphi'(\langle u(t), \vartheta \rangle) \vartheta, d\tilde{G}(t) \rangle \\ & \quad \left. + \int_0^T \langle \psi_r(t) \varphi''(\langle u(t), \vartheta \rangle) \vartheta \otimes \vartheta, d\tilde{H}(t) \rangle \right] = \\ & = - \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \psi_r(0) \varphi(\langle u_0, \vartheta \rangle) \end{aligned}$$

pour $\vartheta \in U_{m_0}$. Mais, m_0 étant arbitraire, l'égalité (5.69) est

vérifiée pour tout $\vartheta \in \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m$.

Démontrons maintenant que la relation (5.69) est vérifiée

pour tout $\vartheta \in W$.

On rappelle d'abord que les hypothèses sur ψ_r , φ , A , B impliquent que, pour $\vartheta \in W$, on a

$$\left| \int_0^T \psi_r(t) \varphi'(\langle u(t), \vartheta \rangle) \langle A(t)u(t) + B(u(t)), \vartheta \rangle dt \right| \leq \Phi_1(u) \|\vartheta\|_W,$$

où

$$\Phi_1(u) = c \{ \|u\|_{L^2(0,T;V)}^2 + \|u\|_{L^2(0,T;V)}^2 \}.$$

Or, à propos de (5.19), on a démontré que

$$P_u y \in L^2(0,T;V) \quad \tilde{\mathbb{P}}\text{-p.s.}$$

D'autre part, d'après le lemme 5.6, la convergence $u_k \rightarrow u$ dans $(L^2(0,T;V)\text{faible})^*$ implique l'inégalité

$$\|u\|_{L^2(0,T;V)} \leq \liminf_k \|u_k\|_{L^2(0,T;V)}.$$

Par suite, la fonction composée $\Phi_1 \circ P_u$ est semi-continue inférieurement par rapport à $y \in \tilde{\Omega} = Y_{(1)}$. Donc, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\tilde{\Omega}} (n \wedge \Phi_1(P_u y)) \tilde{\mathbb{P}}(dy) \leq \liminf_m \int_{\tilde{\Omega}} (n \wedge \Phi_1(P_u y)) \tilde{\mathbb{P}}^m(dy).$$

Si on rappelle (5.28) et la définition de $\tilde{\mathbb{P}}^m$, il s'ensuit que

$$\int_{\tilde{\Omega}} \Phi_1(P_u y) \tilde{\mathbb{P}}(dy) \leq \sup_m \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \Phi_1(u^m) < \infty.$$

D'autre part, il est clair qu'on a

$$\left| \int_0^T \langle \psi_r(t) \varphi'(\langle u(t), \vartheta \rangle) \vartheta, d\tilde{G}(t) \rangle \right| \leq c \|\vartheta\|_W \|P_u y\|_{W_1^1(0,T;W')},$$

$$\left| \int_0^T \langle \psi_r(t) \varphi''(\langle u(t), \vartheta \rangle) \vartheta \otimes \vartheta, \tilde{I}'(t) \rangle dt \right| \leq c \|\vartheta\|_W^2 \|P_u y\|_{W_1^1(0,T;\mathcal{L}^\infty(W;W'))}.$$

Donc, à l'aide des conséquences évidentes de (5.14)-(5.15) et de (5.64), on voit qu'il existe une fonction $\Phi(y)$ telle que

$$(5.70) \quad \begin{cases} |N^*(\vartheta, y)| \leq \Phi(y)(\|\vartheta\|_W + \|\vartheta\|_W^2) & \forall y \in \tilde{\Omega} \quad \forall \vartheta \in W, \\ \int_{\tilde{\Omega}} \Phi(y) \tilde{P}(dy) < \infty, \end{cases}$$

où $N^*(\vartheta, y)$ est l'expression qui se trouve sous l'espérance mathématique $E_{\tilde{P}}$ dans le premier membre de (5.69).

On rappelle maintenant que, en vertu de (5.4), si $\vartheta \in W$, il existe une suite $\{\vartheta_k\}$ telle que

$$\vartheta_k \rightarrow \vartheta \text{ dans } W, \quad \vartheta_k \in \bigcup_{m=1}^{\infty}.$$

On voit aisément que, pour $y \in \tilde{\Omega}$ fixé, on a

$$N^*(\vartheta_k, y) \rightarrow N^*(\vartheta, y) \quad \text{pour } k \rightarrow \infty.$$

Par conséquent, d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, il résulte de (5.70) que

$$E_{\tilde{P}} N^*(\vartheta_k, y) \rightarrow E_{\tilde{P}} N^*(\vartheta, y) \quad \text{pour } k \rightarrow \infty.$$

Donc, compte tenu de la convergence évidente

$$E_{\tilde{P}} \psi_r(0) \varphi(\langle u_0, \vartheta_k \rangle) \rightarrow E_{\tilde{P}} \psi_r(0) \varphi(\langle u_0, \vartheta \rangle) \quad \text{pour } k \rightarrow \infty,$$

on voit que (5.69) est vérifiée pour tout $\vartheta \in W$, ce qui démontre (5.22) et achève la démonstration du théorème 5.1. ■

5. - Démonstration du théorème 5.2.

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer le théorème 5.2 et pour cela supposons que les hypothèses (5.1)-(5.13), (5.16)-(5.18) sont vérifiées.

On pose

$$(5.71) \quad y^m(\omega) = (u^m(\omega), G^m(\omega), H^m(\omega), \langle H^m \rangle(\omega)).$$

Alors $y^m(\omega)$ appartient presque sûrement à $Y_{(2)}$. En effet, d'après

le lemme 5.3, $u^m(\omega)$ appartient presque sûrement à Y^{*u} , tandis que les relations

$$\|\cdot\|_{\mathcal{L}(U;U)} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{L}^1(U;U)} = \|\cdot\|_{\otimes 1},$$

$$\text{Var}_{\mathcal{L}^1(U;U)}(\langle H \rangle; 0, T) \leq \text{Tr} \langle H \rangle(T)$$

(voir aussi l'explication qui suit (5.7)) assurent que $\text{Var}_{\mathcal{L}(U;U)}(\langle H^m \rangle(\omega); 0, T)$ est finie.

D'une manière analogue à (5.59), on définit

$$(5.72) \quad \mathbb{P}_{(2)}^{y^m}(A) = \mathbb{P}(\{\omega: y^m(\omega) \in A\}) \quad \forall A \in \mathcal{B}(Y_{(2)}).$$

On a alors le

LEMME 5.11. Supposons que les hypothèses (5.1)-(5.13),

(5.16)-(5.18) sont vérifiées. Alors il existe une sous-suite $\{\mathbb{P}_{(2)}^{y^{m'}}\}$ de $\{\mathbb{P}_{(2)}^{y^m}\}$ qui converge faiblement, c'est-à-dire qu'il existe une mesure de probabilité $\mathbb{P}_{(2)}^y$ définie sur $(Y_{(2)}, \mathcal{B}(Y_{(2)}))$ telle que, pour toute fonction $\varphi: Y_{(2)} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée, on ait

$$(5.73) \quad \int_{Y_{(2)}} \varphi(y) \mathbb{P}_{(2)}^{y^{m'}}(dy) \rightarrow \int_{Y_{(2)}} \varphi(y) \mathbb{P}_{(2)}^y(dy) \quad \text{per } m' \rightarrow \infty. \quad \square$$

DÉMONSTRATION. En effet, d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, le lemme 5.5 implique que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $\tilde{K}^c(\varepsilon)$ de $C(0, T; W')$ tel que

$$\mathbb{P}(\{\omega: u^m(\omega) \in \tilde{K}^c(\varepsilon)\}) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Donc, si on rappelle la définition de Y^{*u} et le raisonnement de la démonstration du lemme 5.10, on voit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $\tilde{K}^{*u}(\varepsilon/2)$ de Y^{*u} tel que

$$\mathbb{P}(\{\omega: u^m(\omega) \in \tilde{K}^u(\varepsilon/2)\}) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

D'autre part, en vertu de la construction même de $(G^m, H^m, \langle H^m \rangle)$, il existe un compact $\tilde{K}^0(\varepsilon/2)$ de $Y^{\tilde{G}} \times Y^{\tilde{H}} \times Y^{\tilde{I}}$ tel que

$$\mathbb{P}(\{\omega: (G^m(\omega), H^m(\omega), \langle H^m \rangle(\omega)) \in \tilde{K}^0(\varepsilon/2)\}) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Comme dans le cas du lemme 5.10, l'énoncé du lemme 5.11 résulte du critère de Prokhorov. ■

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.2. Pour simplifier la notation, on note, comme dans (5.62), m au lieu de m' l'indice de la sous-suite convergente. On pose alors

$$(5.74) \quad \tilde{\Omega} = Y_{(2)}, \quad \tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{B}(Y_{(2)}), \quad \tilde{\mathbb{P}} = \mathbb{P}_{(2)}^y,$$

$$(5.75) \quad \tilde{\mathbb{P}}^m = \mathbb{P}_{(2)}^{y^m},$$

$$(5.76) \quad u = P_{*u} y, \quad \tilde{G} = P_{*G} y, \quad \tilde{H} = P_{*H} y, \quad \tilde{I} = P_{*I} y \quad (y \in \tilde{\Omega} = Y_{(2)}).$$

$u, \tilde{G}, \tilde{H}$ sont évidemment des variables aléatoires. Le théorème sera donc démontré si on démontre que $u, \tilde{G}, \tilde{H}$ satisfont aux conditions (5.19)-(5.21), (5.23).

Des modifications purement formelles mises à part, les conditions (5.19)-(5.21) sont déjà démontrées dans la démonstration du théorème 5.1. Il ne reste donc que (5.23) à démontrer.

Soit $\psi_r(y)$ une fonction définie sur $\tilde{\Omega}$ bornée et continue par rapport à $y|_{[0,r]} \in Y_{(2)r}$. Pour toute fonction $\tilde{\varphi} \in C^3(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ et pour tout $\vartheta \in U$, on a, d'après la formule d'Ito,

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}^m} \psi_r(y) \{ \tilde{\varphi}(\langle \tilde{H}(t), \vartheta \rangle) - \tilde{\varphi}(\langle \tilde{H}(r), \vartheta \rangle) \} =$$

$$(5.77) \quad = \frac{1}{2} \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}^m} \psi_r(y) \int_r^t \langle \tilde{\varphi}'(\langle \tilde{H}(s), \vartheta \rangle) \vartheta \otimes \vartheta, d\tilde{I}(s) \rangle \quad (t \geq r).$$

Il est évident que le premier membre de (5.77) tend vers

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \psi_r(y) \{ \tilde{\varphi}(\langle \tilde{H}(t), \vartheta \rangle) - \tilde{\varphi}(\langle \tilde{H}(r), \vartheta \rangle) \}$$

quand m tend vers l'infini.

Pour étudier la convergence du second membre de (5.77), on pose, avec une idée analogue à (4.94) (voir aussi le lemme 5.7),

$$a(m, \omega'; s) = \psi_r(\eta^m(\omega')) \tilde{\varphi}''(\langle P_{*H} \eta^m(\omega'; s), \vartheta \rangle) - \psi_r(\eta(\omega')) \tilde{\varphi}''(\langle P_{*H} \eta(\omega'; s), \vartheta \rangle),$$

$$b^1(m, \omega') = \int_r^t \langle \psi_r(\eta(\omega')) \tilde{\varphi}''(\langle P_{*H} \eta(\omega'; s), \vartheta \rangle) (\vartheta \otimes \vartheta), dP_{*I} \eta^m(\omega'; s) \rangle,$$

$$b^0(\omega') = \int_r^t \langle \psi_r(\eta(\omega')) \tilde{\varphi}''(\langle P_{*H} \eta(\omega'; s), \vartheta \rangle) (\vartheta \otimes \vartheta), dP_{*I} \eta(\omega'; s) \rangle.$$

D'après le lemme 5.7, il est clair qu'on a

$$\sup_{r \leq s \leq t} |a(m, \omega'; s)| \rightarrow 0 \quad \text{pour } m \rightarrow \infty$$

pour $\mathbb{P}'$ -presque tout $\omega' \in \Omega'$,

$$|a(m, \omega'; s)| \leq 2(\sup |\psi_r|)(\sup |\varphi''|) = 2c_0 < \infty.$$

Donc, d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\int_{\Omega'} \mathbb{P}'(d\omega') \left(\sup_{r \leq s \leq t} |a(m, \omega'; s)| \right)^2 \rightarrow 0 \quad \text{pour } m \rightarrow \infty.$$

Par suite, comme dans la démonstration de (4.95), en remarquant que la condition (5.7) implique l'estimation

$$\sup_m \int_{\Omega'} \mathbb{P}'(d\omega') [\text{Var}_{\mathcal{L}(U;U)} (P_{*I} \eta^m(\omega'; 0, T))]^2 < \infty,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Omega'} \mathbb{P}'(d\omega') \int_r^t \langle a(m, \omega'; s) \otimes \otimes \otimes, dP_{*I} \tilde{\eta}^m(\omega'; s) \rangle \right| \leq \\
& \leq \left[\int_{\Omega'} \mathbb{P}'(d\omega') \left(\sup_{r \leq s \leq t} |a(m, \omega'; s)| \right)^2 \right]^{1/2} \times \\
& \times \left[\int_{\Omega'} \mathbb{P}'(d\omega') (Var_{\mathcal{L}(U;U)}(P_{*I} \tilde{\eta}^m(\omega'); 0, T))^2 \right]^{1/2} \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

D'autre part, comme $\psi_r(\omega') \tilde{\varphi}''(\langle P_{*I} \tilde{\eta}^m(\omega'; \cdot), \otimes \rangle)$ est continue et uniformément bornée et que $P_{*I} \tilde{\eta}^m(\omega')$ converge vers $P_{*I} \tilde{\eta}(\omega')$ dans $(BV(0, T; \mathcal{L}(U; U)) \text{ faible}^*)^\#$ pour $m \rightarrow \infty$, l'estimation de

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}'} [Var_{\mathcal{L}(U;U)}(P_{*I} \tilde{\eta}^m(\omega'); 0, T)]^2$$

citée ci-dessus entraîne, comme dans la démonstration de (4.96), que

$$\int_{\Omega'} (b^1(m, \omega') - b^0(\omega')) \mathbb{P}'(d\omega') \rightarrow 0 \quad \text{pour } m \rightarrow \infty.$$

Par conséquent, on a, comme dans (4.97),

$$\begin{aligned}
& \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{\mathbb{P}}^m(dy) \psi_r(y) \int_r^t \langle \tilde{\varphi}''(\langle \tilde{H}(s), \otimes \rangle) \otimes \otimes \otimes, d\tilde{I}(s) \rangle \\
& - \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{\mathbb{P}}(dy) \psi_r(y) \int_r^t \langle \tilde{\varphi}''(\langle \tilde{H}(s), \otimes \rangle) \otimes \otimes \otimes, d\tilde{I}(s) \rangle = \\
& = \int_{\Omega'} \mathbb{P}'(d\omega') \int_r^t \langle a(m, \omega'; s) \otimes \otimes \otimes, dP_{*I} \tilde{\eta}^m(\omega'; s) \rangle \\
& + \int_{\Omega'} (b^1(m, \omega') - b^0(\omega')) \mathbb{P}'(d\omega') \rightarrow 0 \quad \text{pour } m \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Par suite, on peut passer à la limite dans (5.77), de sorte qu'on obtient

$$\begin{aligned}
(5.78) \quad & \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}^m} \psi_r(y) \{ \tilde{\varphi}(\langle \tilde{H}(t), \otimes \rangle) - \tilde{\varphi}(\langle \tilde{H}(r), \otimes \rangle) \} = \\
& = \frac{1}{2} \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}^m} \psi_r(y) \int_r^t \langle \tilde{\varphi}''(\langle \tilde{H}(s), \otimes \rangle) \otimes \otimes \otimes, d\tilde{I}(s) \rangle \quad (t \geq r).
\end{aligned}$$

Donc, compte tenu du fait que ψ_r et $\tilde{\varphi}$ sont arbitraires, on a

$$(5.79) \quad \langle \tilde{H} \rangle = \tilde{I} \quad \tilde{\mathbb{P}}\text{-p.s.}$$

Maintenant on considère de nouveau une fonction $\psi_r(\cdot): \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée et continue par rapport à $y|_{[0,r]} \in Y_{(2)r}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Soit $\otimes \in U_{m_0}$. Comme dans la déduction de (5.65), on applique la formule d'Ito au processus $\varphi(\langle u^m(t), \otimes \rangle)$ dans lequel l'expression $\langle u^m(t), \otimes \rangle$ est donnée par (5.25). Alors, comme

$$\int_0^t \langle \varphi'(\langle u^m(s), \otimes \rangle) \otimes, dH^m(s) \rangle$$

est une martingale, on obtient la relation suivante exprimée dans l'espace de probabilité $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}^m)$ défini par (5.72), (5.74)-(5.76)

$$\begin{aligned}
(5.80) \quad & \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}^m} \psi_r(y) \{ \varphi(\langle u(t), \otimes \rangle) - \varphi(\langle u(r), \otimes \rangle) \\
& + \int_r^t \varphi'(\langle u(s), \otimes \rangle) \langle A(s)u(s) + B(u(s)), \otimes \rangle ds \\
& + \int_r^t \langle \varphi'(\langle u(s), \otimes \rangle) \otimes, d\tilde{G}(s) \rangle \\
& - \frac{1}{2} \int_r^t \langle \varphi''(\langle u(s), \otimes \rangle) \otimes \otimes \otimes, d\tilde{I}(s) \rangle \} = 0.
\end{aligned}$$

Puisque la fonction $\varphi(\langle u(t), \otimes \rangle)$ est continue par rapport à $u \in Y^{*u}$, on a, en vertu de (5.73),

$$\begin{aligned}
(5.81) \quad & \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}^m} \psi_r(y) \{ \varphi(\langle u(t), \otimes \rangle) - \varphi(\langle u(r), \otimes \rangle) \} \rightarrow \\
& \rightarrow \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \psi_r(y) \{ \varphi(\langle u(t), \otimes \rangle) - \varphi(\langle u(r), \otimes \rangle) \} \quad \text{pour } m \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

D'autre part, il est clair que le raisonnement sur

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}^m} \int_0^T \psi_r(y; t) \varphi'(\langle u(t), \otimes \rangle) \langle A(t)u(t) + B(u(t)), \otimes \rangle dt$$

dans la déduction de (5.66) reste vrai même si $\psi_r(y; \cdot)$ est remplacée par $\psi_r(y) \chi_{[r,t]}(\cdot)$. On a donc

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}^m} \psi_r(y) \int_r^t \varphi'(\langle u(s), \otimes \rangle) \langle A(s)u(s) + B(u(s)), \otimes \rangle ds$$

(5.82)

$$\rightarrow \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}_r} \psi_r(y) \int_r^t \varphi'(\langle u(s), \vartheta \rangle) \langle A(s)u(s) + B(u(s)), \vartheta \rangle ds$$

pour $m \rightarrow \infty$.

On remarque qu'on a, en vertu de (5.48), (5.50),

$$\psi_r(\eta^m(\omega')) \varphi'(\langle P_{*u} \eta^m(\omega'; \cdot), \vartheta \rangle) \vartheta \rightarrow \psi_r(\eta(\omega')) \varphi'(\langle P_{*u} \eta(\omega'; \cdot), \vartheta \rangle) \vartheta$$

dans $C(0, T; U)$ pour $m \rightarrow \infty$ $\mathbb{P}'$ -p.s.,

$$P_{*G} \eta^m(\omega') \rightarrow P_{*G} \eta(\omega') \quad \text{dans } (BV(0, T; U) \text{ faible})^*$$

pour $m \rightarrow \infty$ $\mathbb{P}'$ -p.s..

On remarque également qu'en vertu de (5.6) on a

$$\int_{\Omega} \mathbb{P}'(d\omega') [\text{Var}_U(P_{*G} \eta^m(\omega'); 0, T)]^2 \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\text{Var}_U(G; 0, T)]^2 < \infty.$$

Par suite, si on raisonne pour la convergence de

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}_r} \psi_r(y) \int_r^t \langle \varphi'(\langle u(s), \vartheta \rangle) \vartheta, d\tilde{G}(s) \rangle$$

de la même manière que dans la démonstration de (4.97), on obtient

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}_r} \psi_r(y) \int_r^t \langle \varphi'(\langle u(s), \vartheta \rangle) \vartheta, d\tilde{G}(s) \rangle \\ (5.83) \quad & \rightarrow \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}_r} \psi_r(y) \int_r^t \langle \varphi'(\langle u(s), \vartheta \rangle) \vartheta, d\tilde{G}(s) \rangle \quad \text{pour } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

A la fin, comme, pour tout $s \in [0, T]$, l'expression

$$\psi_r(y) \varphi''(\langle P_{*u} y(s), \vartheta \rangle)$$

est continue par rapport à $y \in Y_{(2)}$, le raisonnement de la déduction de (5.78) à partir de (5.77) reste valable même s'il s'agit de la convergence de

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}_r} \psi_r(y) \int_r^t \langle \varphi''(\langle u(s), \vartheta \rangle) \vartheta \otimes \vartheta, d\tilde{I}(s) \rangle.$$

Cette expression tend donc vers

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}_r} \psi_r(y) \int_r^t \langle \varphi''(\langle u(s), \vartheta \rangle) \vartheta \otimes \vartheta, d\tilde{I}(s) \rangle,$$

c'est-à-dire que, compte tenu aussi de (5.79), on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}_r} \psi_r(y) \int_r^t \langle \varphi''(\langle u(s), \vartheta \rangle) \vartheta \otimes \vartheta, d\tilde{I}(s) \rangle \\ (5.84) \quad & \rightarrow \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}_r} \psi_r(y) \int_r^t \langle \varphi''(\langle u(s), \vartheta \rangle) \vartheta \otimes \vartheta, d\langle \tilde{H} \rangle(s) \rangle \quad \text{pour } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Par conséquent, en vertu de (5.81)-(5.84), en passant à la

limite dans (5.80), on obtient, pour $\vartheta \in \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}_r} \psi_r(y) [\varphi(\langle u(t), \vartheta \rangle) - \varphi(\langle u(s), \vartheta \rangle) \\ & + \int_r^t \varphi'(\langle u(s), \vartheta \rangle) \langle A(s)u(s) + B(u(s)), \vartheta \rangle ds \\ (5.85) \quad & - \int_r^t \langle \varphi'(\langle u(s), \vartheta \rangle) \vartheta, d\tilde{G}(s) \rangle \\ & - \frac{1}{2} \int_r^t \langle \varphi''(\langle u(s), \vartheta \rangle) \vartheta \otimes \vartheta, d\langle \tilde{H} \rangle(s) \rangle] = 0 \\ & (t \geq r). \end{aligned}$$

Pour démontrer (5.85) pour $\vartheta \in W$ en général, on considère une suite $\{\vartheta_k\}$ telle que

$$\vartheta_k \rightarrow \vartheta \quad \text{dans } W, \quad \vartheta_k \in \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m.$$

On verra que, en appliquant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue au premier membre de (5.85) pour ϑ_k ($k = 1, 2, \dots$), on obtiendra (5.85) pour ϑ .

Comme en effet $u \in C(0, T; W')$ $\tilde{\mathbb{P}}$ -p.s., il n'est pas difficile de voir que, pour $\tilde{\mathbb{P}}$ -presque tout $y \in \tilde{\Omega}$ fixé, l'expression qui se trouve sous l'espérance mathématique $\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}$ dans (5.85) et dans laquelle ϑ est remplacé par ϑ_k converge vers la même expression avec ϑ .

On va maintenant voir l'existence d'une fonction intégrable

qui borne supérieurement la valeur absolue de l'expression se trouvant sous $\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}$ dans (5.85). On a en effet

$$\begin{aligned} |\varphi(\langle u(t), \vartheta_k \rangle) - \varphi(\langle u(r), \vartheta \rangle)| &\leq 2(\sup|\varphi|), \\ \left| \int_r^t \varphi'(\langle u(s), \vartheta_k \rangle) \langle A(s)u(s) + B(u(s)), \vartheta_k \rangle ds \right| &\leq \\ &\leq c(\sup|\varphi'|)(\|u\|_{L^2(0,T;V)} + \|u\|_{L^2(0,T;V)}^2) \sup_k \|\vartheta_k\|_W, \\ \left| \int_r^t \langle \varphi'(\langle u(s), \vartheta_k \rangle) \vartheta_k, d\tilde{G}(s) \rangle \right| &\leq \sup|\varphi'| \sup_k \|\vartheta_k\|_U \text{Var}_U(\tilde{G}; 0, T), \\ \left| \int_r^t \langle \varphi''(\langle u(s), \vartheta_k \rangle) \vartheta_k \otimes \vartheta_k, d\tilde{H}(s) \rangle \right| &\leq \\ &\leq \sup|\varphi''| \sup_k \|\vartheta_k\|_U^2 \text{Var}_{\mathcal{L}(U;U)}(\langle \tilde{H} \rangle; 0, T). \end{aligned}$$

D'une manière analogue au passage de (5.69) pour $\vartheta \in \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m$ à (5.69) pour $\vartheta \in W$, on obtient

$$\int_{\tilde{\Omega}} (\|u\|_{L^2(0,T;V)} + \|u\|_{L^2(0,T;V)}^2) \tilde{\mathbb{P}}(dy) < \infty.$$

Le raisonnement de la démonstration de (4.99) s'applique, sans modifications essentielles, à $\text{Var}_U(\tilde{G}; 0, T)$, de sorte qu'on obtient

$$\int_{\tilde{\Omega}} \text{Var}_U(\tilde{G}; 0, T) \tilde{\mathbb{P}}(dy) < \infty.$$

En outre, il n'y a aucune difficulté substantielle pour appliquer ce raisonnement à $\text{Var}_{\mathcal{L}(U;U)}(\tilde{I}; 0, T)$ et donc, en vertu de (5.79), aussi à $\text{Var}_{\mathcal{L}(U;U)}(\langle \tilde{H} \rangle; 0, T)$. Par suite, on obtient

$$\int_{\tilde{\Omega}} \text{Var}_{\mathcal{L}(U;U)}(\langle \tilde{H} \rangle; 0, T) \tilde{\mathbb{P}}(dy) < \infty.$$

Donc, si on rappelle que $\sup|\psi_r|$, $\sup|\varphi|$, $\sup|\varphi'|$, $\sup|\varphi''|$, $\sup_k \|\vartheta_k\|_W$, $\sup_k \|\vartheta_k\|_U$ sont des constantes finies, on voit que, d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, le

premier membre de (5.85) avec ϑ_k converge vers celui avec ϑ quand k tend vers l'infini. Donc, vu que l'ensemble $\bigcup_{m=1}^{\infty} U_m$ est dense dans W , la relation (5.85) est vérifiée pour tout $\vartheta \in W$.

Comme ψ_r est arbitraire, il en résulte que le processus

$$\begin{aligned} N_{\varphi}^{\vartheta}(t) &= \\ &= \varphi(\langle u(s), \vartheta \rangle) - \varphi(\langle u_0, \vartheta \rangle) \\ &+ \int_r^t \varphi'(\langle u(s), \vartheta \rangle) \langle A(s)u(s) + B(u(s)), \vartheta \rangle ds \\ &- \int_r^t \langle \varphi'(\langle u(s), \vartheta \rangle) \vartheta, d\tilde{G}(s) \rangle - \frac{1}{2} \int_r^t \langle \varphi''(\langle u(s), \vartheta \rangle) \vartheta \otimes \vartheta, d\langle \tilde{H} \rangle(s) \rangle \end{aligned}$$

est une martingale par rapport à la base stochastique $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in [0, T]}, \tilde{\mathbb{P}})$ définie par (5.74), (5.55) (avec $i = 2$).

On considère maintenant la fonction

$$\Phi_2(P_{*u}y) = c(\|P_{*u}y\|_{L^2(0,T;V)}^2 + \|P_{*u}y\|_{L^2(0,T;V)}^4).$$

Comme dans le cas de la fonction $\Phi_1(P_u y)$ utilisée dans le passage de (5.69) pour $\vartheta \in \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m$ à (5.69) pour $\vartheta \in W$, on voit aisément que la fonction $\Phi_2(P_{*u}y)$ est semi-continue inférieurement par rapport à $y \in \tilde{\Omega} = Y_{(2)}$. Donc, (5.27) entraîne que

$$\int_{\tilde{\Omega}} \Phi_2(P_{*u}y) \tilde{\mathbb{P}}(dy) \leq \sup_m \mathbb{E} \Phi_2(u^m) < \infty.$$

Comme on a évidemment

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} |\langle u(t) - u_0 - \tilde{G}(t), \vartheta \rangle|^2 < \infty \quad \forall t \in [0, T],$$

il en résulte que

$$\mathbb{E} |M^{\vartheta}(t)|^2 < \infty \quad \forall t \in [0, T]$$

(où $M^{\vartheta}(t)$ est le processus défini dans (5.23)).

On voit aisément que la démonstration de la remarque 4.3 reste valable même pour les fonctions $M^\partial(t)$, $N_\phi^\partial(t)$ que l'on considère ici. Il s'ensuit que la condition (5.23) est vérifiée, ce qui achève la démonstration du théorème 5.2. ■

6. - Sur les équations de Navier-Stokes stochastiques.

Les équations de Navier-Stokes stochastiques dans un domaine régulier et borné de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$ quelconque sont des cas particuliers des équations stochastiques du type Navier-Stokes que nous avons considérées dans les théorèmes 5.1, 5.2. Donc, ces théorèmes peuvent être appliqués aux équations de Navier-Stokes stochastiques. On rappelle toutefois que, pour $n > 3$, les équations et leurs solutions ne représentent plus le mouvement d'un fluide réel, même si elles ne cessent de susciter notre curiosité mathématique.

Considérons d'abord le cas de dimension 3. Comme dans le chapitre 1, soit O un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ dont la frontière ∂O est assez régulière. Soient V^0 , V^1 , Pr les espaces et l'opérateur définis par (1.5), (1.6), (1.11). Posons encore

$$(5.86) \quad A = -Pr\Delta, \quad B(u) = Pr(u \cdot \nabla)u.$$

Alors les équations de Navier-Stokes stochastiques que nous voulons envisager s'écrivent sous la forme

$$du(t) = [-Au(t) - B(u(t))]dt + dG(t) + dH(t).$$

Pour appliquer les théorèmes 5.1, 5.2 au problème de martingales

correspondant à cette équation, nous choisissons les espaces de Hilbert séparables U , V , W comme suit:

$$(5.87) \quad \begin{cases} U = V^0, \\ V = W = V^1. \end{cases}$$

On voit aisément que les espaces U , V , W définis par (5.87) et les opérateurs A , B définis par (5.86) satisfont aux conditions (5.1)-(5.12), (5.16) (la condition (5.16) est vérifiée avec $\alpha = 1/2$). Donc, si les processus stochastiques G et H et la donnée initiale u_0 sont donnés et satisfont aux conditions (5.5)-(5.7), (5.13)-(5.15) (respectivement aux conditions (5.5)-(5.7), (5.13), (5.17)-(5.18)), alors, d'après le théorème 5.1 (respectivement d'après le théorème 5.2), il existe une base stochastique $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in [0, T]}, \tilde{P})$ et des variables aléatoires

$$u: \tilde{\Omega} \rightarrow L^2(0, T; U), \quad \tilde{G}: \tilde{\Omega} \rightarrow C(0, T; U), \quad \tilde{H}: \tilde{\Omega} \rightarrow C(0, T; U)$$

qui satisfont aux conditions (5.19)-(5.22) (respectivement aux conditions (5.19)-(5.21), (5.23)). Ces variables aléatoires ainsi obtenues représentent une solution des équations de Navier-Stokes stochastiques en dimension 3 (voir les définitions (5.86), (5.87) de A , B , U , V , W).

Il n'est pas difficile de voir que les théorèmes peuvent être appliqués aux équations de Navier-Stokes stochastiques en dimensions n avec $n \geq 2$ quelconque (le cas $n = 1$ est absolument privé d'intérêt à cause de la condition $\nabla \cdot u = \partial_x u = 0$). Pour cela, il suffira de choisir un espace de Hilbert séparable W qui, avec les espaces U et V , satisfait aux conditions des théorèmes 5.1,

5.2.

Soit O un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) dont la frontière ∂O est assez régulière. Les espaces V^∞ , V^0 , V^1 définis dans (1.4)-(1.6) sont généralisés d'une manière naturelle:

$$(1.4)\text{bis} \quad V^\infty = \{u \in (C_0^\infty(O))^n : \nabla \cdot u = 0 \text{ dans } O\},$$

$$(1.5)\text{bis} \quad V^0 = \text{adhérence de } V^\infty \text{ dans } (L^2(O))^n,$$

$$(1.6)\text{bis} \quad V^1 = \text{adhérence de } V^\infty \text{ dans } (H^1(O))^n.$$

L'opérateur Pr se définit de la même manière que (1.11):

$$(1.11)\text{bis} \quad Pr = \text{projection orthogonale de } (L^2(O))^n \text{ sur } V^0.$$

Les opérateurs A et B sont alors définis comme suit:

$$(5.88) \quad \begin{cases} A = -Pr\Delta = -Pr\left(\sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 \cdot\right), \\ B(u) = Pr(u \cdot \nabla)u = Pr\left(\sum_{i=1}^n u_i \partial_{x_i} u\right). \end{cases}$$

Nous choisissons les espaces de Hilbert séparables U , V comme suit:

$$(5.89) \quad U = V^0, \quad V = V^1.$$

Quant à l'espace W , nous le choisissons comme suit:

$$(5.90) \quad W = V^s = \{u : u = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j, \quad a_j \in \mathbb{R}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^s a_j^2 < \infty\}$$

avec $s \in \mathbb{N}$ à déterminer, où V^s est muni du produit scalaire

$$(u|v)_W = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^s (u|e_j)_{V^0} (v|e_j)_{V^0},$$

et $\{e_j\}$, $\{\lambda_j\}$ sont les vecteurs propres et les valeurs propres de l'opérateur $A = -Pr\Delta$. Il n'est pas difficile de voir que $\{e_j\}$ et

$\{\lambda_j\}$ jouissent de propriétés analogues à celles du cas de dimension 3 observées dans le paragraphe 1 du chapitre 2.

Il n'est pas difficile de voir que, dans le cas $n = 2$, le choix de $W = V^1$, avec les définitions (5.88), (5.89) de A , B , U , V , satisfait à toutes les hypothèses des théorèmes 5.1, 5.2 sur A , B , U , V , W . Donc, les théorèmes 5.1, 5.2 sont vérifiés avec $W = V^1$ et avec A , B , U , V définis par (5.88), (5.89) pour $n = 2$ (le choix $W = V^s$ avec $s \geq 2$ signifie une hypothèse plus forte que le cas de $W = V^1$ et donc les théorèmes se vérifient également).

Supposons maintenant que $n > 3$. Examinons d'abord la condition sur s pour que la condition (5.10) et éventuellement la condition (5.16) soient vérifiées. Le critère du choix de s résultera des propriétés de l'immersion des espaces de Sobolev. En effet, si $v \in V^1$, alors on a

$$\|v\|_{(L^q(O))^n} \leq c\|v\|_{(H^1(O))^n} \leq c'\|v\|_{V^1}, \quad q = \frac{2n}{n-2}.$$

D'autre part, si $w \in V^s$, alors on a

$$\|w\|_{(L^r(O))^n} \leq c\|w\|_{(H^s(O))^n} \leq c'\|w\|_{V^s}, \quad r = \frac{2n}{n-2s}.$$

Donc, pour qu'il existe un nombre $c > 0$ tel que

$$\|B(v)\|_{W'} \leq c\|v\|_V^2 \quad \forall v \in V,$$

il suffit que

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{1}{2},$$

ou encore

$$s \geq \frac{n}{2} - 1.$$

D'autre part, toujours d'après le théorème d'immersion de Sobolev, pour que la condition (5.16) soit vérifiée, il suffit que

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} < \frac{1}{2},$$

ou encore

$$s > \frac{n}{2} - 1.$$

Or, quelque soit $s \geq 1$, les conditions (5.1)-(5.4), (5.8), (5.9), (5.12) sont vérifiées avec $W = V^s$. En outre, on voit aisément que le choix $W = V^s$ qui satisfait à la condition (5.10) satisfait aussi à la condition (5.11).

Donc, si $s \geq (n/2) - 1$ et si u_0, G, H sont donnés et satisfont aux conditions (5.13)-(5.15), alors le théorème 5.1 est vérifié avec A, B, U, V donnés dans (5.88), (5.89) et avec $W = V^s$ ($s \geq (n/2) - 1$). D'autre part, si $s > (n/2) - 1$ et si u_0, G, H sont donnés et satisfont aux conditions (5.13), (5.17)-(5.18), alors le théorème 5.2 est vérifié avec A, B, U, V donnés dans (5.88), (5.89) et avec $W = V^s$ ($s > (n/2) - 1$).

Un exemple curieux serait le cas $n = 4$. Supposons donc que $n = 4$. Pour que le théorème 5.1 avec u_0, G, H satisfaisant à (5.13)-(5.15) soit vérifié, on peut choisir

$$V = W = V^1.$$

D'autre part, pour qu'on puisse appliquer le théorème 5.2, il faut choisir au moins

$$W = V^2,$$

donc

$$V \neq W.$$

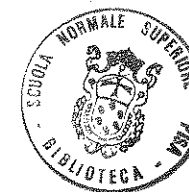
FIN.

BIBLIOGRAPHIE

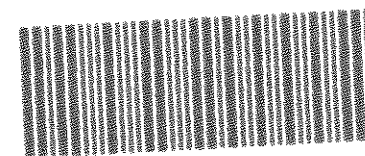
- [AKM] S. N. Antontsev, A. V. Kazhikhov, V. N. Monakhov: *Problèmes aux limites de mécanique des fluides non homogènes* (en russe). Nauka, Novosibirsk, 1983; *Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids* (traduction anglaise). Amsterdam, 1990.
- [BT] A. Bensoussan, R. Temam: Equations stochastiques du type Navier-Stokes. *J. Func. Anal.*, 13 (1973), 195-222.
- [Ca] L. Cattabriga: Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 31 (1961), 308-355.
- [Cr] A. B. Cruzeiro: Solutions et mesures invariantes pour des équations d'évolution stochastiques du type Navier-Stokes. *Expositiones Mathematicae*, 7 (1989), 73-82.
- [GS] I. I. Gihman, A. V. Skorohod: *Théorie des processus stochastiques, tome I* (en russe). Nauka, Moscou, 1971; *The theory of stochastic processes, vol. I* (traduction anglaise). Springer, 1980.
- [H] E. Hopf: Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen. *Math. Nachr.*, 4 (1951), 213-231.
- [IW] N. Ikeda, S. Watanabe: *Stochastic differential equations and diffusion processes*. North-Holl. Publ., 1981.
- [K] A. V. Kazhikhov: Solubilité du problème de Cauchy et aux limites pour l'équation de mouvement pour les fluides visqueux incompressibles non-homogènes (en russe). *Dokl. Akad. Nauk* 216 (1974), 1008-1010. (traduit aussi en anglais).

- [Lad] O. A. Ladyzhenskaya: *Problèmes mathématiques de dynamique des fluides visqueux* (édition russe). Nauka, Moscou, 1970; *The mathematical theory of viscous incompressible flow* (traduction anglaise). Gordon & Breach, New York, 1969.
- [LanLif] L. D. Landau, E. M. Lifshitz: *Hydrodynamique* (en russe). Nauka, Moscou, 1954 (la dernière édition, 1986); *Mécanique des fluides* (traduction française). Mir, Moscou, 1971.
- [Le1] J. Leray: Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique. *J. Math. Pures et Appl.*, 12 (1933), 1-82.
- [Le2] J. Leray: Essai sur le mouvement plan d'un liquide visqueux que limitent des parois. *J. Math. Pures Appl.*, 13 (1934), 331-418.
- [Le3] J. Leray: Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Math.*, 63 (1934), 193-248.
- [LioPr] J. L. Lions, G. Prodi: Un théorème d'existence et unicité dans les équations de Navier-Stokes en dimension 2. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 248 (1959), 3519-3521.
- [M] M. Métivier: *Reelle und vektorwertige Quasimartingale und die Theorie der stochastischen Integration*. Springer, 1977.
- [Pa] E. Pardoux: *Intégrales stochastiques hilbertiennes*. Publication de l'univ. Paris-Dauphine, 1976.
- [T] R. Temam: *Navier-Stokes equations, theory and numerical analysis*. North-Holl. Publ., 1977.
- [V2] M. Viot: Solution en loi d'une équation aux dérivées partielles stochastique non linéaire: méthode de monotonie. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 278 (1974), A-1405-1408.
- [V2] M. Viot: Solutions faibles d'équations aux dérivées partielles stochastiques non linéaires. *Thèse de doctorat*, Paris VI, 1976.

- [VF] M. I. Vishik, A. V. Fursikov: *Problèmes mathématiques d'hydrodynamique statistique* (édition russe). Nauka, Moscou, 1980. *Mathematische Probleme der statistischen Hydromechanik* (traduction allemande) Akad. Verl., Leipzig, 1986.



SNS - PISA



311582