

Indice

Introduzione	ix
1 Elementi di teoria degli insiemi	1
1.1 Connettivi logici e notazioni di base	1
1.2 Prodotto cartesiano di due insiemi	3
1.3 Relazioni	4
1.4 Relazioni di equivalenza	5
1.5 Relazioni d'ordine	6
1.6 Funzioni	9
1.7 L'insieme dei numeri naturali	11
1.8 Successioni definite per ricorrenza	17
1.9 Prodotti cartesiani multipli e assioma della scelta	19
1.10 Cardinalità di insiemi	21
1.11 Cardinalità di $\mathcal{P}(A)$	27
1.12 Insiemi finiti e infiniti	28
1.13 Il lemma di Zorn	29
1.14 Il teorema di Zermelo	32
1.15 Dimostrazione del lemma di Zorn	35
1.16 Appendice: gli assiomi di Zermelo-Fraenkel	37
1.17 Esercizi	40
2 Insiemi numerici e operazioni	51
2.1 Operazioni su \mathbb{N}	51
2.2 Dai naturali agli interi relativi	54
2.3 Dagli interi ai razionali	56
2.4 Campi	57
2.5 Costruzione del campo \mathbb{R} dei numeri reali	59
2.6 Operazioni su \mathbb{R}	61

2.7	Campi ordinati	65
2.8	Campi ordinati completi	68
2.9	Esercizi	69
3	Complementi sulle successioni di numeri reali	77
3.1	Massimo e minimo limite	78
3.2	Confronti asintotici tra successioni	82
3.3	Ordini di infinito e di infinitesimo	86
3.4	Teorema di Stolz-Cesaro	88
3.5	Teoremi di Cesaro	91
3.6	Esercizi	93
4	Sommatorie su insiemi infiniti	97
4.1	Somme di termini non negativi	97
4.2	Limiti lungo insiemi ordinati filtranti	99
4.3	Sommatorie con termini di segno generico	100
4.4	Il caso $I = \mathbb{N}$: confronto con la nozione di “somma di una serie”	102
4.5	Convergenza incondizionata di serie	103
4.6	Scomposizione di sommatorie convergenti	107
4.7	Sommatorie a più indici	109
4.8	Prodotto di Cauchy di successioni	112
4.9	Esercizi	114
5	Spazio euclideo \mathbb{R}^n, spazi topologici e metrici	121
5.1	Struttura euclidea di \mathbb{R}^n : prodotto scalare, modulo e distanza	122
5.2	Insiemi aperti e chiusi di \mathbb{R}^n , parte interna, chiusura, frontiera	125
5.2.1	Insiemi aperti e chiusi	125
5.2.2	Parte interna, chiusura e frontiera di un insieme	126
5.2.3	Punti di accumulazione, punti isolati e derivato di un insieme	128
5.3	Successioni a valori in \mathbb{R}^n	129
5.4	Caratterizzazione per successioni della chiusura e del derivato di un insieme	132
5.5	Punti limite di una successione	132
5.6	Spazi topologici	134
5.7	Funzioni continue tra spazi topologici	137
5.7.1	Continuità in un punto e limiti	137
5.7.2	Funzioni continue sull'intero dominio	138
5.7.3	Test di continuità con successioni	140

5.8	Spazi metrici	142
5.8.1	Distanze, spazi metrici, esempi	142
5.8.2	Topologia di spazi metrici, limiti e funzioni continue	146
5.8.3	Spazi metrici completi	148
5.8.4	Completamento di uno spazio metrico	150
5.8.5	\mathbb{R} come completamento metrico di \mathbb{Q} e distanze vettoriali	153
5.9	Il teorema di Baire	154
5.10	Compattezza	155
5.10.1	Sottoinsiemi compatti di spazi topologici e spazi topologici compatti	155
5.10.2	Funzioni continue su compatti	159
5.10.3	Compattezza in spazi metrici	159
5.11	Connessione, connessione per archi, convessità	163
5.11.1	Spazi topologici connessi	163
5.11.2	Componenti connesse	165
5.11.3	Connessione per archi	166
5.12	Esercizi	169
6	Successioni e serie di funzioni	195
6.1	Convergenza puntuale e uniforme	195
6.2	Continuità del limite uniforme	197
6.3	La convergenza uniforme come convergenza in uno spazio metrico	199
6.4	Derivabilità della funzione limite	201
6.5	Convergenza uniforme di serie di funzioni e spazi vettoriali normati	206
6.6	Serie di potenze	210
6.7	Derivabilità sull'asse reale	213
6.8	Serie di Taylor e funzioni analitiche	214
6.9	Complementi	219
6.9.1	Convergenza in punti del bordo del cerchio di convergenza	219
6.9.2	Formule per il resto nello sviluppo di Taylor	223
6.9.3	Adattabilità delle funzioni C^∞	226
6.9.4	Dimostrazione del Teorema di Borel	227
6.9.5	Alcune serie notevoli	228
6.10	Esercizi	229

7	Calcolo differenziale in più variabili	245
7.1	Funzioni continue da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m	245
7.2	Derivate parziali e direzionali	247
7.3	Differenziale	249
7.4	Il teorema del differenziale totale	253
7.5	Curve regolari in \mathbb{R}^n	255
7.6	Curve regolari e grafici in \mathbb{R}^2	256
7.7	Grafici e insiemi di livello: il teorema della funzione implicita	257
7.8	Lunghezza di archi e parametro lunghezza d'arco	262
7.9	Funzioni differenziabili da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m	265
7.10	Composizione di funzioni differenziabili	266
7.11	Derivate di ordine superiore	267
7.12	Campi vettoriali, integrali curvilinei, potenziali	271
7.13	Esercizi	279
8	Equazioni differenziali ordinarie	291
8.1	Definizioni e primi esempi	291
8.2	Metodi risolutivi per alcuni tipi di equazioni del primo ordine	294
8.2.1	Equazioni a variabili separabili	294
8.2.2	Equazioni lineari	296
8.2.3	Equazioni di Bernoulli	297
8.2.4	Inversione delle variabili	297
8.2.5	Equazioni omogenee	297
8.3	Problemi di Cauchy per equazioni del primo ordine	297
8.4	Contrazioni in spazi metrici	300
8.5	Esistenza e unicità locale di soluzioni di problemi di Cauchy	301
8.6	Lemma di Gronwall, teoremi del confronto e di esistenza globale	307
8.7	Sistemi di equazioni differenziali ed equazioni di ordine superiore	313
8.8	Sistemi differenziali lineari a coefficienti costanti e matrice esponenziale	317
8.9	Calcolo della matrice esponenziale	322
8.10	Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di ordine superiore	324
8.11	Esercizi	326
	Libri utili o per approfondire	339