Prefazione

Questo è il terzo di tre volumetti – indipendenti ma con un filo conduttore comune – che intendono presentare alcuni temi di storia della matematica e alcuni temi di matematica nel contesto storico, dagli antichi greci agli inizi del Novecento; quindi, storia e soprattutto matematica con le sue argomentazioni e deduzioni che utilizzano soltanto metodi del puro ragionamento logico, senza l'uso di evidenze geometriche o numeriche o retoriche, dimostrazioni, anche se non sempre nel senso in cui lo intendiamo oggi.

Alla base di questi volumi c'è anche il desiderio di presentare questi temi alla riflessione soprattutto degli insegnanti e degli studenti di matematica e, auspicabilmente, dei colleghi, con la speranza che il distacco storico e il senso del poi rendano i fatti esposti fruibili.

Ma c'è di più. Come ogni attività umana, la matematica si svolge all'interno di una società che evolve storicamente, e fatti come quelli relativi alla sua o alle sue *verità*, al senso da attribuire al *dimostrare* sono condizionati dal tempo e dalle conoscenze già acquisite. Ci sono però delle caratteristiche specifiche della matematica:

- Si tratta di una scienza *cumulativa*: non ci sono rivoluzioni che cancellano una teoria in favore di un'altra, come nelle scienze sperimentali (sempre che si concordi che vi siano rivoluzioni nelle scienze sperimentali). Ci possono invece essere, e ci sono stati, cambiamenti di prospettiva.
- Il processo storico consiste nel selezionare e nell'inglobare in un contesto più ampio e *astratto* le conoscenze note, magari alla fine di lunghi periodi di *sperimentazione*.
- I matematici, o almeno alcuni di essi per primi, sanno anche capire quando il processo *localmente* è arrivato alla fine con delle *'verità' condivise unanimemente* dall'intera comunità.

Se guardiamo alla storia della matematica, ma anche all'apprendimento elementare, vediamo infatti due aspetti che si susseguono e, spesso, coesistono e che possiamo identificare, con il senno di poi e con i limiti connaturati alle schematizzazioni, come una fase *sperimentale* o *procedurale* e una fase di *astrazione* o di *concettualizzazione* o di *oggettivazione*: una sorta di *dualità operazionale/strutturale* che si manifesta anche nel dibattito se la matematica si *inventi* o si *scopra*, riconducibile alle visioni epistemologica e ontologica di Aristotele e di Platone. Nella prima fase si sperimentano e ci si abitua a procedure e dimostrazioni che permettono di ottenere risultati, che poi diventeranno casi particolari, utilizzando ipotesi al momento evidenti e che in un periodo successivo non lo saranno più e suggeriranno la necessità di ulteriori *motivazioni*. Successivamente, la maturazione delle idee porta ad una fase di *astrazione* o *concettualizzazione* o *oggettivazione*. Nel seguito vedremo vari esempi. Ovviamente il processo non è lineare nel tempo né nella esplicita comprensione delle vari fasi e spesso ha richiesto un lungo periodo. Ad esempio, gli *Elementi* di Euclide presentano la matematica (elementare) che probabilmente si è sviluppata nell'arco di due o tre secoli. Il *Calcolo infinitesimale* introdotto alla fine del Seicento trova una sua presentazione ragionevole e coerente alla fine dell'Ottocento, dopo due secoli di intenso uso.

Nella maturazione delle tecniche e delle idee, spesso quel che era evidente lo è sempre meno. Intervengono nuove scoperte, che, quando rilevanti, si trasformano in nuovi oggetti matematici. Si ha allora un passaggio ad un grado di maggiore astrazione, che permette di inglobare lo sviluppo precedente, senza più preoccuparsi esplicitamente di tutti i dettagli raccolti precedentemente; e poi si ricomincia ad un livello di astrazione superiore. Questo processo di selezione e chiarificazione di fatti e concetti spesso riduce migliaia di pagine a poche pagine, tramite la formazione di un linguaggio *essenziale*, *preciso* e *sintetico*. Di conseguenza, per avere speranza di capire occorre spesso studiare e digerire una lunga sequela di concetti di livello inferiore. Tuttavia, questo è uno svantaggio con cui si deve convivere: rende più difficile la gestione dei concetti che ne derivano e rende necessaria, di volta in volta, la costruzione di nuove visioni che per buona parte non possono che essere personali. Da qui derivano sicuramente alcune delle difficoltà a capire gli scritti di matematica, anche da parte degli addetti ai lavori, e a ripercorrere lo sviluppo in tempi e spazi ragionevoli e, ancor più, a dare una presentazione storica delle verità acquisite. Ciononostante una presentazione storica ha il vantaggio di essere utile alla comprensione e alla riflessione sul senso e, ovviamente, sulle motivazioni e l'origine di molti concetti e metodi della matematica.

Quanto detto offre indubbiamente spunti di riflessione e, soprattutto, questioni che impongono risposte che potremmo definire *pedagogiche*. Innanzi tutto che cosa è elementare e cosa non lo è; cosa quindi sia opportuno insegnare in un primo momento e cosa sia opportuno rimandare, e quali siano i modi più efficaci e magari divertenti per insegnare questi fatti elementari e non; servirà poi una comprensione della natura, ad esempio psicologica, dell'apprendimento matematico; servirà definire le finalità e gli obiettivi da raggiungere; serviranno anche dei metodi di valutazione atti a verificare se gli obiettivi siano stati raggiunti o meno, e così via. Esistono una vasta letteratura e una altrettanto vasta sperimentazione (come sempre, più o meno interessanti e utili) connesse alle domande poste; ma è sempre presente il rischio di trasformare esigenze giustissime in una nuova disciplina accademica, magari dimenticandosi dell'oggetto principale in questione, nel nostro caso la matematica. Comunque, non essendo purtroppo l'autore un esperto in questi argomenti, non sarà avanzata nessuna proposta o suggerimento nelle direzioni indicate dalle questioni appena poste. Tuttavia questo non ci esime dal ribadire alcune considerazioni ben note sulla utilità dell'insegnamento della matematica.

Parafrasando dalla Prefazione di [146], la matematica con la sua storia di più di 2500 anni è sicuramente una delle componenti fondamentali della nostra civiltà come la filosofia, la letteratura, le religioni, le arti, le scienze in generale, non solo quelle naturali ma anche quelle sociali, e la tecnologia; si può anzi dire che tutta la nostra vita in realtà, anche in modo nascosto, si fonda sui risultati di questa scienza:

- è utile, anzi essenziale, a fini pratici; nel tempo e particolarmente oggi buona parte della tecnologia che utilizziamo o vediamo utilizzata non sarebbe stata possibile senza un'enorme e spesso raffinata quantità di matematica;
- è la struttura portante e sostiene il carico principale del ragionamento scientifico ed è al centro delle più importanti teorie scientifiche; si può dire che molta della fisica o della chimica non ci sarebbe senza matematica; ma ormai essa è rilevante anche nelle scienze sociali come quelle comportamentali, l'economia, le scienze politico-sociologiche, o quelle relative all'analisi delle situazioni di rischio;
- ha contribuito a determinare la direzione e il contenuto di parte del pensiero filosofico; molti filosofi sono stati anche matematici o, comunque, fortemente interessati alla matematica; infatti, essendo la matematica l'espressione fondamentale della razionalità, essa è anche espressione della filosofia, perlomeno se questa vuole essere filosofia razionale;
- ha generato la nostra logica a partire dai greci, passando per le raffinatezze medievali, alle riflessioni metodologiche rinascimentali, alle intuizioni leibniziane fino a Bolzano e Cantor e ai grandi logici-matematici del XIX e XX secolo Frege, Russell, Hilbert, Gödel solo per citare pochi nomi, tanto da poter dire che oggi la logica è un ramo della matematica;
- infine, ha influenzato nel corso dei secoli stili pittorici, musicali, architettonici e anche letterari.

Ma, come sempre, c'è di più. Nelle parole del platonico Proclo, [263],

> Questa è quindi la matematica: essa suscita in voi le forme invisibili dell'anima, dà vita alle proprie scoperte, sveglia la mente e purifica l'intelletto; essa porta alla luce le nostre idee intrinseche, essa elimina l'oblio e l'ignoranza che sono con noi fin dalla nascita.

e in quelle di Robert Musil, [245],

> Tutto il nostro progresso civile è nato con il suo [della matematica] aiuto [...]. Ma soltanto se, invece di guardare all'utilità esterna, consideriamo nella matematica stessa la proporzione fra le parti utilizzate e le parti non utilizzate scorgeremo l'altro volto, il volto autentico, di questa scienza. Il volto non finalizzato, ma antieconomico e passionale [...]. La matematica è un'ostentazione di audacia della pura ratio; uno dei pochi lussi oggi ancora possibili. [...] Alleghiamo un piccolo esempio [...]. I pionieri della matematica ricavarono da certi principi delle idee utilizzabili. Da quelle idee nacquero induzioni, tipi di calcolo, risultati. I fisici ci misero su le mani e ne ricavarono nuovi risultati. Alla fine arrivarono i tecnici, accontentandosi spesso di questi risultati, ci fecero su dei nuovi calcoli e crearono le macchine. Ma ad un tratto, quando ogni cosa era stata realizzata per il meglio, saltan su i matematici [...] e si accorgono che nelle basi di tutta la faccenda c'è qualcosa che non torna. Proprio così, i matematici guardarono giù al fondo e videro che tutto l'edificio è sospeso in aria [...]. A questo scandalo intellettuale il matematico reagisce in modo esemplare: lo sopporta con orgogliosa fiducia nella pericolosità del proprio intelletto [...]. Noialtri dopo l'Illuminismo ci siamo persi di coraggio. È bastato un piccolo fallimento per farci voltare le spalle all'intelletto, e permettiamo a ogni esaltato zuccone di tacciare di vano razionalismo le aspirazioni di D'Alembert e Diderot. Andiamo in visibilio per il sentimento e diamo addosso all'intelletto.

In effetti per più di duemila anni una certa familiarità con la matematica è stata considerata parte indispensabile del patrimonio intellettuale di ogni persona, mentre oggi molte persone colte rifiutano la matematica anche come oggetto di *interesse culturale*. Agli inizi del ventesimo secolo Henri Poincaré già scriveva, cfr. [259]

> Un fatto ci deve meravigliare o, meglio, ci dovrebbe meravigliare se non fossimo ormai abituati ad esso. Come può essere che ci siano persone che non capiscono la matematica? Se la scienza invoca solo le regole della logica, quelle accettate dalle menti ben educate, come è possibile che in così tanti siano impervi ad essa come molti insegnanti di scuola media ci testimoniano?

Nell'ambito di una scuola più formativa che informativa, l'esposizione alla matematica e al suo sviluppo con il fluire di ragionamenti logici, la necessità continua di un esame critico e del controllo del contesto e delle ipotesi nelle quali si produce una tesi, l'attenzione nell'evitare tautologie e ragionamenti circolari ecc., sono un formidabile strumento per lo sviluppo delle competenze per comprendere la realtà. A questo fine basterebbe forse esporre gli studenti ad alcune delle problematiche già note che si sono imposte nei secoli, piuttosto che costringere i più a risolvere spesso problemi dove chi apprende è ridotto a semplice esecutore se non altro perché i dati forniti sono sempre quelli necessari e sufficienti per la conclusione. Volendo proseguire con l'insegnamento per problemi, sarebbe di gran lunga più produttivo fornire più dati o anche, perché no, meno dati del necessario, in modo da lasciare spazio alla sperimentazione e all'invenzione. E comunque perché non dedicare un po' di tempo ad illustrare il ruolo della matematica nello sviluppo culturale complessivo? In fondo non tutti sono particolarmente vogliosi di esercitarsi per acquisire gli aspetti più tecnici e di questo bisognerà pur tener parzialmente conto.

In questi volumi, come già detto, si parlerà di matematica o, meglio, di alcuni problemi specifici, con particolare riferimento a come sono stati affrontati nei vari periodi storici, con errori e argomentazioni non necessariamente 'matematiche' nel senso in cui lo intendiamo oggi, analizzando le ragioni sia interne alla matematica sia esterne che hanno motivato l'introduzione di nuove idee e tecniche. Come detto, l'idea guida è stata quella di fornire momenti di *riflessione* all'insegnante che vorrà dedicare del tempo alla loro lettura e trarre magari stimoli di lavoro – in fondo, alla fine le responsabilità delle scelte restano dell'insegnante, ed è giusto che sia così – e, più in generale, a quanti hanno voglia di riflettere su queste cose.

Veniamo ora al contenuto dei tre volumi. *Aspetti della matematica prima del Calcolo* [148] comincia col discutere il problema dell'area per le figure geometriche nella matematica greca, la soluzione geometrica trovata dai Greci con la teoria delle proporzioni e, soprattutto, il metodo di esaustione nei contributi di Archimede. Prosegue con l'illustrare la rinascita della matematica in Europa a partire dal dodicesimo secolo, l'uso di metodi infinitesimali, l'evoluzione della nozione di curva, l'introduzione del concetto di variazione, . . . , fatti che delineano un cambiamento verso una visione sempre più *analitica* della matematica, e ancora una serie di questioni che, viste a posteriori, sembrano prefigurare l'esigenza di un calcolo differenziale e integrale. *La nuova filosofia della natura. Misure, variazioni ed equazioni differenziali* [149] riguarda la nascita del Calcolo con Newton e Leibniz e quindi la sintesi di variazione e integrazione che si realizza con le *equazioni differenziali*, che portano alla nuova visione matematica del mondo: la *meccanica razionale* e la *gravitazione universale*. Infine, questo volume, *Funzioni e numeri*, partendo dai grandi successi del Settecento, soprattutto nella descrizione del mondo reale, le equazioni differenziali delle vibrazioni, delle onde, del calore e del potenziale gravitazionale, analizza la nuova visione delle funzioni in termini di *frequenze* che, oltre a richiedere risposte a molte questioni, impone un ripensamento, in termini di *rigore* e non solo, delle nozioni di continuità, differenziabilità e integrazione, che troveranno un riequilibrio nella più astratta teoria della misura di fine Ottocento e inizio Novecento. Parte di questo sviluppo si ricollega alla fondazione delle nuove università nello spirito humboldtiano, che si prefiggono di educare e avviare alla ricerca e quindi richiedono una presentazione organica del materiale agli studenti. Il volume si chiude con un piccolissimo sguardo su una piccolissima parte di un nuovo mondo che si sta aprendo, la matematica del ventesimo e ventunesimo secolo.

Come detto fin dall'inizio, i tre volumi possono essere letti e utilizzati separatamente, ma il tema prevalente e allo stesso tempo unificante che ci ha guidato sono le equazioni differenziali come sintesi di una visione matematica del mondo e in quanto equazioni che coinvolgono gli elementi differenziali, cioè le variazioni delle funzioni, e l'integrazione, cioè il processo inverso che in modo 'naturale' porta, dopo un lungo cammino, alla nuova *teoria della misura* che idealmente ci riporta al problema iniziale dell'area per gli antichi greci.

Il lettore troverà ulteriori informazioni, anche sulla letteratura primaria e secondaria, ad esempio in [146] [147], da cui è tratto molto materiale dei primi due volumetti[1]. Per quanto riguarda il terzo volume, molto materiale è tratto da [161] [162] [181] [193] [202] e più in generale dalle opere citate in Bibliografia. Un'altra fonte è ovviamente la 'rete' dove si possono trovare molte opere qui citate e non, contributi di esperti e meno esperti su qualunque argomento qui trattato (un esercizio utile potrebbe essere quello di separare contributi interessanti da contributi meno interessanti o non corretti). Ovviamente enorme è la letteratura *tecnica* che presenta in modo formale e coerente, nel linguaggio matematico contemporaneo, quanto viene solitamente raggruppato e denominato come *Analisi Matematica*; per ovvi motivi l'autore non può che 'propagandare' [152] [151] [153] [154] [155].

Mi piace concludere questa prefazione ringraziando Giuseppe Modica, a cui sono legato da una lunga amicizia e collaborazione scientifica, per aver letto varie stesure di questi volumi, aver eliminato molti errori e aver contribuito ad una migliore selezione e presentazione di vari argomenti. Gli errori che ancora restano sono ovviamente da imputare all'autore.

Un ringraziamento va alle *Edizioni della Normale*, che hanno accettato di

[1] Qui mi sembra opportuno fare qualche osservazione. A mio parere – da una parte a sostegno della tesi che in vari problemi matematici importanti ci sia *a posteriori* una sorta di filo conduttore attorno a cui tentativi, errori, sperimentazione, idee, concetti e presentazione formale si diramano in direzioni a volte non buone o non corrette e a volte prefigurando quelle corrette, e questo fin dalla matematica ellenica, e dall'altra per una migliore comprensione delle motivazioni che hanno portato agli argomenti discussi in questo volume – i primi due volumetti [148] [149] sono da ritenere parte integrante e utili all'intera opera non solo dal punto di vista degli argomenti discussi ma anche perché operativamente spesso cercano di instaurare un confronto-rapporto tra la rappresentazione informale e la presentazione formale su questioni relativamente più semplici di quelle di questo terzo volume.

Avendo discusso in un contesto più ampio vari aspetti della matematica dal periodo ellenistico fino alla fine del Settecento in [146] e [147], come detto, molto materiale è tratto appunto da quei volumi, spesso letteralmente. Infatti, essendo [148] [149] diretti soprattutto a studenti ed insegnanti e non avendo pretese accademiche, se non la speranza che il lavoro fatto potesse essere apprezzato anche da colleghi accademici, non mi sembrava opportuno riferirsi semplicemente a [146] e [147], che assieme assommano a circa 950 pagine, e limitarsi ad aggiungere quanto già non presente.

Ma, essendomi stato comunicato che erano state sollevate difficoltà relativamente alla pubblicazione dei primi due volumetti, ho accettato l'offerta di pubblicare a stampa solo il terzo e ho deciso di mettere a disposizione dei lettori interessati i primi due all'indirizzo `homepage.sns.it/giaquinta/`.

pubblicare questo volume (mentre i primi due volumetti si possono trovare all'indirizzo `homepage.sns.it/giaquinta/`), e alla loro redazione, in particolare a Maria Vittoria Benelli e Costanza Larese, per l'accurato e pregevole lavoro editoriale.

Firenze, dicembre 2018 e giugno 2019