Prefazione alla traduzione italiana

Non appena ho appreso dell'iniziativa del matematico Sandro Graffi (esperto anche di aspetti storici) circa una traduzione dal latino delle *Disquisitiones arithmeticae* di Carl Friedrich Gauss, accanto a una positiva sorpresa, la mia mente è immediatamente tornata a quando, ancora studente liceale, invano avevo cercato questo volume tra quelli proposti dalle case editrici e librerie di allora.

La Utet ne aveva fatto un proprio progetto di edizione italiana (assieme ad altre opere scientifiche di somma portata storica, come gli *Elementi* di Euclide, i *Principia* di Newton, parte delle opere di Laplace, e altre edizioni pubblicate nella collana 'Classici'), ma a quanto ne so questa bella idea, ahimè, non andò mai a buon fine.

Dunque forte è stato il mio entusiasmo nell'essere interpellato, molti decenni dopo, riguardo alla pubblicazione di questa traduzione da parte delle Edizioni della Normale.

Ai tempi del liceo, da tutte le descrizioni a me accessibili avevo appreso dell'impatto fondamentale che quest'opera di Gauss aveva avuto in assoluto nell'intera storia ed evoluzione di tutta la Matematica. Le *Disquisitiones* si concentrano su quello che oggi si denomina ancora *Aritmetica* ma più comunemente *Teoria dei Numeri*, disciplina che (almeno in prima istanza) si occupa delle proprietà dei *numeri interi* $1, 2, 3, \ldots$, quelli con cui 'si conta'. Questi numeri sono tra gli oggetti matematici più immediati, con cui prima veniamo a contatto; e in effetti questo si riflette nel fatto che molte questioni (anche difficilissime) sui numeri interi si possono *formulare* in modo comprensibile anche ai profani. Per contro, lo studio delle proprietà recondite dei numeri interi si è sempre rivelato estremamente sfuggente e ricco di profondi misteri, tanto suggestivi quanto impenetrabili. Inoltre, le ricerche sui numeri hanno condotto a idee di grande impatto anche in settori della Matematica *a priori* lontanissimi, e l'opera di Gauss offre un meraviglioso esempio di questo tipo di influsso.

I numeri interi avevano già affascinato varie civiltà antiche; ad esempio Euclide ne aveva riportato negli *Elementi* alcuni aspetti basilari, quali il concetto di numero primo, la fattorizzazione unica, le soluzioni intere di equazioni lineari. Poi nei secoli successivi la disciplina ebbe sorti frammentarie, fino a rinascere nel XVII secolo con Fermat, i cui problemi (e metodi) di grande originalità furono ripresi (ad esempio) da Eulero, Lagrange, Legendre, tra i grandi matematici di quei tempi. Questi diedero contributi acuti e dirompenti, e tuttavia alcuni problemi centrali, pur di formulazione semplice e apparentemente innocua, erano rimasti senza risposta; pare che Lagrange arrivasse a dire che il soggetto era risultato per lui così spinoso (pur attraente) che le delusioni avevano superato le gratificazioni.

A questo punto Gauss entrò nel contesto e ne piegò l'evoluzione. La sua immaginazione matematica è diventata poi leggendaria, considerata del grado più straordinario. Già da giovanissimo annotava le proprie osservazioni in un *diario*; ad esempio aveva risolto da solo il problema, che veniva dalla Grecia antica, della costruzione (con 'riga e compasso') del poligono regolare di 17 lati. A un certo punto, incoraggiato e sostenuto dal suo protettore, il mecenate Duca di Braunschweig, raccolse in modo sistematico le proprie ricerche sui numeri, e il risultato è l'opera in oggetto, dedicata al Duca stesso, e pubblicata per la prima volta, in latino, nel 1801 (pare tre anni dopo che Gauss, ventunenne, l'aveva concepita).

I contenuti sono monumentali come quantità e come importanza e nemmeno lontanamente riassumibili esaustivamente in questa prefazione. Mi limiterò dunque ad una descrizione sommaria, laddove sarebbe possibile andare molto avanti anche nella considerazione delle ripercussioni di una sola tra queste scoperte.

Gauss inizia con uno sviluppo delle proprietà elementari dei numeri interi; benché in questi primissimi capitoli figurino anche risultati noti in precedenza, la presentazione contiene naturalmente innovazioni sostanziali e conferisce all'opera una propria spiccata indipendenza dal passato (oltre che una autonomia quanto allo sviluppo dei contenuti). Qui ad esempio Gauss introduce il rivoluzionario (per quanto semplice) concetto di *congruenza modulo m* e una relativa notazione, originando di fatto la nozione di *struttura quoziente* in Algebra, oggi universalmente presente. Egli concepisce una congruenza come una nuova forma di uguaglianza, e nei capitoli 2 e 3 tratta alcuni tipi di corrispondenti equazioni algebriche. Abbiamo i primi esempi di *campi finiti* (considerati poi sistematicamente da Galois).

A questo fa seguito (capitolo 4) un'attenzione speciale sulle congruenze quadratiche, con un (altro) grandissimo contributo: la prima dimostrazione della *legge di reciprocità quadratica*, congetturata già da Eulero e Legendre, ma sfuggita fino ad allora ad ogni approccio dimostrativo. Si tratta di un teorema non solo di formidabile sottigliezza ed eleganza (che Gauss denominò *Aureum theorema*) ma anche con significato e ricadute profondissimi e ancora oggi di attualità.

Gauss affronta poi nel lungo capitolo 5 la teoria delle forme quadratiche intere, soprattutto binarie (ma con importanti risultati anche sulle forme ternarie). È stupefacente anche per un lettore moderno constatare la profondità delle idee (e pure la complessità delle verifiche di formule numeriche e simboliche). Gauss supera e distacca nettamente la pur eccellente teoria di Lagrange, concependo una legge di gruppo (nozione che ancora non esisteva, ma che qui viene implicitamente introdotta e sviluppata nel caso *abeliano finito*!) per *composizione* tra le *classi proprie* di forme di discriminante assegnato (laddove mescolare classi proprie e improprie, come fatto inconsapevolmente negli studi precedenti, comporta una perdita strutturale). Questo anticipa il concetto di *ideale* e pure l'intera Teoria Algebrica dei Numeri. Vengono create le classificazioni in *ordini*, *generi*, *classi* (terminologia attinta da Linneo), ancora oggi fondamentali nelle teorie dei gruppi aritmetici e le geometrie che ne derivano.

Come corollari Gauss ritrova una seconda dimostrazione, completamente diversa, della legge di reciprocità e una dimostrazione della meravigliosa congettura di Fermat per cui *ogni intero positivo è somma di tre – o meno – numeri triangolari*: questo risultato è molto più difficile dell'analogo (pur sottile, di Lagrange) per cui *ogni intero è somma di quattro – o meno – quadrati*; ancora oggi la dimostrazione di Gauss è quella logicamente più economica e profonda.

Come semplici applicazioni, nel capitolo 6 figurano anche vari eleganti risultati su alcuni tipi di *equazioni diofantee* (quadratiche), denominazione che proviene da Diofanto di Alessandria (III secolo d.C.) e che indica equazioni per cui si cercano soluzioni intere. Vengono anche studiate applicazioni al problema puramente algoritmico di *fattorizzazione esplicita di un intero assegnato*, questione non solo intellettualmente avvincente, ma oggi della massima attualità e importanza in Informatica e in Crittografia.

Nel capitolo 7 (l'ultimo, anche se l'opera inizialmente prevedeva anche un capitolo 8) viene trattato il problema della *ciclotomia*, la divisione del cerchio in parti uguali. La costruzione del poligono regolare di 17 lati a cui si alludeva è un semplice corollario della profondissima teoria di Gauss qui esposta.

Per studiare algebricamente i problemi ciclotomici, Gauss stabilisce intanto l'irriducibilità (sul campo razionale) dei corrispondenti polinomi. Introduce poi i *Periodi Gaussiani* costruiti a partire dalle *radici primitive modulo p* introdotte nel capitolo 3 (per inciso, è questo uno dei punti in cui si riscontra l'intrinseca coerenza di tutta l'opera). Le idee contengono il concetto di invarianza rispetto a un gruppo e sono anticipatrici di quella che sarà la teoria di Galois delle equazioni; anzi, si può dire che questo capitolo contiene la Teoria di Galois dei campi ciclotomici. Le equazioni per i periodi quadratici e cubici vengono esplicitamente determinate; compaiono le *somme di Gauss*, da allora onnipresenti e fondamentali in moltissime questioni, e vengono (implicitamente) prodotte formule per il numero di punti modulo p su certe curve ellittiche. In pratica questi risultati sono stati poi riconosciuti come casi della celebre *Ipotesi di Riemann*, interpretata per campi di funzioni, dando origine a uno degli sviluppi matematici più profondi e impressionanti della storia, con i lavori di Deuring, F.K. Schmidt, E. Artin, Hasse, Weil, Dwork, Grothendieck, Deligne e altri, ancora al centro del panorama matematico nell'Algebra, Geometria e Analisi complessa e p-adica.

Gauss all'inizio del capitolo si spinge addirittura a considerare l'analogo problema di divisione per curve come la *lemniscata*, anticipando ancora una volta gli sviluppi moderni della teoria dei punti di torsione sulle curve ellittiche (ripresa da Mazur e Serre negli anni '70 e tuttora molto studiata).

Si è parlato di un capitolo 8, che non fu mai portato a termine. Ebbene, ne esisteva però una versione incompleta ed è un grande merito di questa traduzione il fatto che, a differenza di altre, contenga anche tale contributo nella parte finale. Benché non terminata, questa parte è pure di grandissimo interesse, sia matematico che storico; infatti Gauss studia in modo esplicito la struttura dei polinomi su campi finiti, e i campi che ne conseguono: essi comunemente vengono oggi denominati *Campi di Galois*, ma in effetti qui si vede che essi comparvero già con Gauss. Questo studio è un altro esempio della somma capacità di Gauss di astrarre un problema specifico, fino a farlo diventare importante teoria.

La lettura di questo libro austero è tanto attraente quanto impegnativa e istruttiva: il perfetto rigore, lucidità, sintesi, coerenza, esaustività e anche economia di presentazione naturalmente aiutano ma non possono supplire a uno sforzo costante del lettore, che deve penetrare idee sofisticate e ricchissime di addentellati e di suggerimenti per approfondimenti; il matematico Dirichlet pare facesse delle *Disquisitiones* un breviario da tenere sempre a portata di mano, anche prima di coricarsi.

Un aspetto peculiare che personalmente mi ha sempre colpito (fin dalle mie prime letture) è la combinazione di elevatissima astrazione immaginativa e allo stesso tempo di concretezza esemplificativa: i *teoremi* vengono molto spesso presentati come *risposte a problemi* espliciti, e accompagnati da esempi numerici, talvolta estesi o laboriosi. La richiesta di un *algoritmo effettivo* di soluzione è spessissimo implicita anche nello sviluppo di concetti molto astratti. Credo che un tale modo di concepire la Matematica (non si tratta infatti a mio avviso di una mera questione di *stile espositivo*) sia comunque assolutamente educativo, quale che sia la tendenza personale di ognuno.

Lo studio dell'opera auspicabilmente coinvolgerà anche le giovani generazioni presenti e future. E certo questa nuova traduzione è un importante contributo in tal senso.

Tornando ai miei tempi di studente, le traduzioni in cui mi imbattei furono quella in francese di A.C.M. Poullet-Delisle (*Recherches arithmétiques*, Courcier, Paris, 1807, ristampa Blanchard, Paris, 1953) e in inglese di A.A. Clarke (Yale University Press, 1966, ristampa Springer, 1986).

Questa traduzione italiana apporterà comunque una molto benvenuta novità espositiva. Va notato che lo stile strutturale è più vicino all'originale rispetto alle traduzioni in altre lingue. Un ulteriore pregio è costituito, oltre alla presenza del capitolo 8, dall'appendice contenente annotazioni manoscritte di Gauss, invece apparentemente assenti da altre traduzioni.

La traduzione, iniziata da Sandro Graffi stesso, è stata completata da Costanza Larese (dottorata alla Normale in Logica e filosofia della scienza). Una fine rilettura è stata poi effettuata dai due giovani allievi in Matematica Giulio Grammatica e Giovanni Interdonato, della Scuola Normale. Il collega Michele Benzi della Scuola Normale ha pure svolto una preziosa opera nel coordinare questi contributi.

Questi sforzi vanno apprezzati dall'intera comunità matematica, per aver colmato una lacuna essenziale, con ricercata competenza e con impegno estremamente attento e certamente molto gravoso.

Pisa, dicembre 2022

Umberto Zannier