

Indice

Introduzione	xi
1 Notazioni	1
2 Fondamenti	5
§2.1 Logica	5
§2.1.1 Proposizioni	5
§2.1.2 Logica proposizionale	6
§2.1.3 Logica del primo ordine	10
§2.2 Teoria degli insiemi	14
§2.2.1 Teoria degli insiemi elementare	14
§2.2.2 Assiomi di Zermelo–Fraenkel	18
§2.2.3 Lemma di Zorn, Assioma della Scelta, Teorema di Zermelo	24
§2.3 Relazioni	27
§2.4 Ordinamenti	30
§2.4.1 Ordinamento diretto e filtrante	31
§2.4.2 Ordinamento lessicografico	34
§2.4.3 Ordinamento totale, sup e inf	35
§2.4.4 Ordinamento totale, intervalli	36
§2.4.5 Tipi di ordine	37
§2.4.6 Concatenazione	38
§2.5 Funzioni	39
§2.6 Funzioni elementari	43
§2.7 Passaggio al quoziente	44
§2.8 Numeri naturali in ZF	46
§2.8.1 Successore	46
§2.8.2 Numeri naturali in ZF	47
§2.8.3 Insiemi transitivi	49
§2.8.4 Ordinali	51
§2.9 Buoni ordinamenti	53
§2.9.1 Successore	54

§2.9.2	Segmenti e buoni ordinamenti	55
§2.9.3	Esempi	56
§2.10	Cardinalità	57
§2.10.1	Insiemi finiti	58
§2.10.2	Confronto	58
§2.10.3	Cardinalità numerabile	59
§2.10.4	Cardinalità del continuo	60
§2.10.5	In generale	61
§2.10.6	Potenza	64
§2.11	Operazioni su insiemi	64
§2.11.1	Limsup e liminf di insiemi	66
§2.12	Combinatoria	67
3	Numeri naturali	69
§3.1	Induzione	70
§3.2	Definizione per ricorrenza	71
§3.3	Aritmetica	73
§3.4	Ordinamento	76
§3.4.1	Ordinamento dall'aritmetica	77
§3.4.2	Ordinamento e aritmetica	79
§3.5	Compatibilità Z-F e Peano	79
§3.6	Induzione generalizzata, buon ordinamento	80
§3.7	Frequentemente, definitivamente	81
4	Gruppi, Anelli, Campi	83
5	Retta reale	89
§5.1	Intorni	91
§5.2	Frequentemente, definitivamente	92
§5.3	Estremi superiori e inferiori	93
§5.3.1	Esercizi	95
§5.4	Limiti	96
§5.5	Limiti superiori e inferiori	97
§5.6	Approssimazione di numeri irrazionali	101
§5.7	Algebrici	103
6	Successioni e serie	105
§6.1	Successioni	105
§6.1.1	Sommazione per parti	109
§6.2	Successioni definite per ricorrenza	109
§6.3	Serie	110
§6.3.1	Criteri	110
§6.3.2	Esercizi	113

§6.3.3	Prodotto di Cauchy	116
§6.4	Successioni generalizzate, o “reti”	117
§6.5	Serie generalizzate	120
§6.5.1	Serie generalizzate a termini positivi	120
7	Topologia	121
§7.1	Intorni, punti aderenti, isolati, di accumulazione	123
§7.2	Esempi	126
§7.3	Topologie generate	127
§7.4	Compattezza	128
§7.5	Connessione	129
§7.6	Reti	131
§7.7	Continuità e limiti	132
§7.8	Basi	134
§7.9	Spazi primo- e secondo-numerabili	138
§7.10	Spazi non primo-numerabili	139
8	Miscellanea	141
§8.1	Poligoni	141
§8.2	Insieme di Cantor	144
9	Spazi metrici	145
§9.1	Definizioni	145
§9.2	Topologia in spazi metrici	148
§9.2.1	Basi di palle	152
§9.2.2	Punti di accumulazione, punti limite	153
§9.3	Quozienti	155
§9.4	Funzione distanza	156
§9.5	Connessione	157
§9.6	Topologia nella retta reale	158
§9.7	Topologia nello spazio euclideo	160
§9.8	Punti fissi	161
§9.9	Isometrie	162
§9.10	Compattezza	162
§9.11	Teoremi e categorie di Baire	165
§9.12	Prodotto di infiniti spazi metrici	166
§9.13	Ultrametria	167
§9.13.1	Ultrametria delle successioni	168
§9.14	Ultrametria p-adica	169
§9.15	Circonferenza	171
10	Dimensione	173

11 Spazi normati	177
§11.1 Norme nello spazio Euclideo	179
§11.2 Isometrie	181
§11.3 Convergenza totale	182
§11.4 Norme di applicazioni lineari	182
§11.5 Norme di matrici	183
§11.6 Somma di Minkowski	184
§11.7 Morfologia matematica	185
12 Semicontinuità, limiti destri e sinistri	189
§12.1 Semi continuità	189
§12.2 Funzioni regolate	192
§12.3 Trasformata di sup	192
13 Continuità	195
§13.1 Funzioni continue	195
§13.2 Funzioni uniformemente continue	197
§13.3 Funzioni Lipschitziane & Hölderiane	199
§13.4 Funzioni discontinue	201
14 Funzioni e insiemi convessi	203
§14.1 Insiemi convessi	203
§14.1.1 Proiezione, separazione	205
§14.2 Funzione convessa	207
§14.3 Caso reale	209
§14.3.1 Convessità e derivate	210
§14.3.2 Funzioni convesse a valori estesi	211
§14.4 Ulteriori proprietà e esercizi	211
§14.4.1 Funzione distanza	212
§14.4.2 Funzioni e insiemi strettamente convessi	212
15 Integrale di Riemann	215
16 Funzioni derivabili	221
§16.1 Derivate successive	224
§16.2 Sviluppo di Taylor	227
§16.3 Derivate parziali e totali, differenziali	230
§16.4 Teorema di funzione implicita	232
§16.4.1 Estensioni	235
§16.5 Problemi vincolati	236
§16.5.1 Vincoli con disuguaglianze	237

17 Limiti di funzioni	239
§17.1 Sul Teorema di Ascoli–Arzelà	243
18 Serie di potenze	245
§18.1 Somma e prodotto, composizione e inversa	246
§18.2 Exp, sin, cos	247
§18.3 Esponenziale di matrici	249
19 Funzioni analitiche	253
20 Curve	255
§20.1 Curve chiuse	257
21 Superfici	261
22 Equazioni differenziali	263
§22.1 Problemi autonomi	265
§22.2 Risoluzione	266
§22.3 Discussioni qualitative	266
§22.4 Involuppo	268
§22.5 Equazioni lineari	271
§22.6 Equazioni matriciali	274
23 (pseudo)compit(in)i	277
§23.1 Equazioni funzionali	282
§23.2 Campi vettoriali	283
Appendice A Soluzioni degli esercizi	285
Indice analitico	519
Elenco delle figure	533
Libri utili o per approfondire	535