Prefazione

Queste note nascono da un corso di Sistemi Dinamici per studenti del secondo e terzo anno delle lauree triennali in Matematica e Fisica alla Scuola Normale, tenuto da S. M. in diverse forme per più di venti anni, e a cui F. G. ha partecipato prima come studente e poi come assistente. I corsi della Scuola Normale sono tradizionalmente intesi come complemento dei corsi dell'Università di Pisa, ed i contenuti di questo libro rispecchiano tale vocazione. Gli argomenti sono presentati presupponendo familiarità con le nozioni di base di topologia, analisi in più variabili e analisi complessa usualmente affrontate nei primi anni dei percorsi di studio universitari in Matematica e Fisica. Gli elementi di teoria della misura o della probabilità e di analisi funzionale di cui si fa uso sono richiamati nel corso del testo.

Negli anni il corso di Sistemi Dinamici ha incluso molti argomenti non contenuti in queste note, come le basi della meccanica Hamiltoniana, della Meccanica Statistica e della Teoria dell'Informazione. In questi appunti si è voluto concentrare l'attenzione su sistemi dinamici a tempo discreto e sulla loro interazione con diverse strutture sullo spazio delle fasi sottostante, con particolare cura per la nozione di coniugio di sistemi dinamici che identifica sistemi isomorfi.

Un corso di "Introduzione" ai Sistemi Dinamici deve fare necessariamente riferimento a testi più completi, a partire dai classici che più hanno influenzato la nostra esposizione. Menzioniamo i principali di seguito.

Il Capitolo 1 introduce la nozione di sistema dinamico e di equivalenza (coniugio) tra sistemi diversi, discute brevemente la relazione tra sistemi a tempo continuo e discreto, presenta risultati di base su sistemi dinamici topologici arrivando a una prima nozione di caos. Il lettore può trovare una discussione di questi ed altri argomenti di base in *Dynamical Systems* di Sternberg [17].

Il Capitolo 2 ed il successivo Capitolo 3 contengono gli elementi di base della Teoria Ergodica, nel contesto di sistemi dinamici misurabili, ovvero

di trasformazioni di spazi di probabilità. L'obiettivo è presentare le nozioni di sistema ergodico e mescolante sotto vari aspetti, fornire esempi rilevanti e discutere il collegamento con il punto di vista topologico. Tra i molti libri esistenti sull'argomento facciamo riferimento in particolare a quelli di Cornfeld, Fomin, Sinai [6] e di Viana, Oliveira [20].

Il Capitolo 4 è dedicato ad un argomento classico all'intersezione tra la Teoria dei Numeri e quella dei Sistemi Dinamici, ovvero gli sviluppi in frazione continua. Il fulcro della discussione è la mappa di Gauss vista come sistema dinamico sull'intervallo $[0, 1]$. Oltre ai testi già citati (per il punto di vista dinamico) un riferimento fondamentale è l'Introduzione alla Teoria dei Numeri di Hardy, Wright [11].

I due Capitoli successivi trattano argomenti più avanzati, ma che si è voluto includere come esempi importanti di relazione tra i Sistemi Dinamici ed altre parti della Matematica. Il Capitolo 5 inizia introducendo l'equazione coomologica per un sistema dinamico dal punto di vista della coomologia di gruppi. Discutiamo poi come (la risolubilità di) questa equazione caratterizzi l'equivalenza tra sistemi dinamici, in particolare degli *Skew Products*, e come questo possa essere utilizzato per produrre esempi significativi come quello di Furstenberg – temi che il lettore ritroverà nei succitati [6, 20]. Il successivo Capitolo 6 riguarda sistemi dinamici dati da trasformazioni del piano complesso e della sfera di Riemann, costituenti l'ampio argomento della Dinamica Complessa che il lettore può approfondire nella monografia di Carleson e Gamelin [5] o nel Capitolo VIII del libro di Brin e Stuck [3]. Dopo una breve discussione sulla stabilità in questo contesto, ci soffermiamo sulla linearizzazione in un punto di mappe olomorfe, un argomento che appartiene ai problemi di *piccoli divisori*. Oltre alla teoria dei diffeomorfismi del cerchio, l'esempio più importante di problema di piccoli divisori è il celebre teorema di Kolmogorov-Arnold-Moser, che tuttavia non discuteremo avendo scelto di non includere la meccanica Hamiltoniana in queste note. Una discussione più generale e referenze complete si possono trovare in altri testi di S. M. [8, 14].

Infine, il Capitolo 7 è dedicato a un tema fondamentale della teoria ergodica del secolo XX, ovvero l'entropia. Viene presentata la nozione di entropia di Kolmogorov-Sinai e di entropia topologica, accennando a come la teoria di Ornstein mostri l'importanza dell'entropia nella classificazione dei sistemi dinamici. Calcoleremo l'entropia di sistemi dinamici che emergono naturalmente come dinamica simbolica in sistemi più complessi, ovvero le *catene di Markov*, che per questo hanno ricevuto grande attenzione nel contesto dei sistemi dinamici e di cui diamo una introduzione dal punto di vista del calcolo della probabilità. Anche per questo argomento sono presenti molti ottimi riferimenti nella letteratura, menzio-

niamo in particolare il libro di Mañé [13] che abbiamo seguito da vicino in diversi punti.

Questo libro non sarebbe potuto esistere senza la positiva partecipazione degli studenti ai corsi di Sistemi Dinamici, che con le loro domande, le osservazioni e precisazioni puntuali, gli appunti e le correzioni hanno costituito un importante riferimento. Un ringraziamento particolare va a Ugo Bindini, Martino Ottolini, Alessandro Piazza, Alessandro Pigati e Marco Venuti.